Differentialgleichungen 8. Teil

Differentialgleichungen 2. Ordnung mit periodischer Störung

Definition

Wir setzen (Technische Konvention):

a = 2δ , $b = {\omega_0}^2$

Die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 2\delta\, \dot{y}(t) + \ {\omega_0}^2 y(t) = \ y_0 \sin(\omega t)$$

ist eine

lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und einer periodischen Störung.

Sie beschreibt Schwingungssysteme, die mit einer periodischen Störung angeregt werden (Schwingungsgleichung)

Dabei ist:

- δ die Dämpfungskonstante
- ω_0 die Kreisfrequenz des ungedämpften Systems (Eigenfrequenz)
- ω die Kreisfrequenz der Störung
- y_0 die Amplitude der Störung
- $\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ die Kreisfrequenz der ***gedämpften*** freien Schwingung

Wir setzen

Mit den Anfangsbedingungen

$$(AB)_1: \; y(0) = 0$$
$$(AB)_2: \; y'(0) = 0$$

Lösung der Schwingungsgleichung

und der Annahme $\omega_0 > \delta > 0$ (Schwingfall) ergibt sich die Lösung dieser Differentialgleichung :

1.Schritt (homogene Lösung):

Aus

$$\ddot{y}(t) + 2\delta\,\dot{y}(t) + \ {\omega_0}^2 y(t) = 0$$

folgt die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\delta\,\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Dann ist

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega_d$$

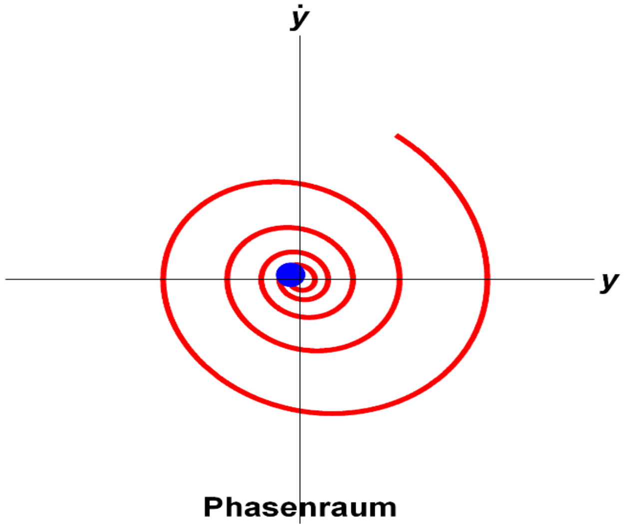
und die reell wertige Lösung der homogenen Differentialgleichung

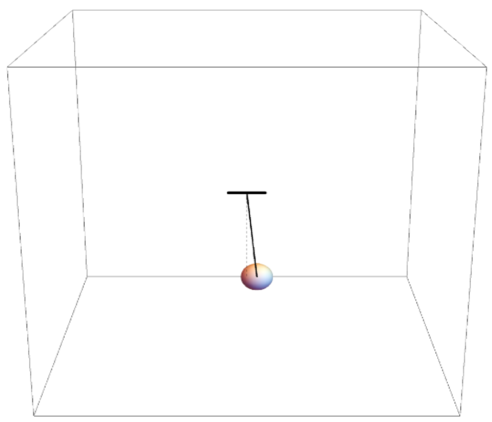
$$y_h(t) = e^{-\delta t}(c_1 \cos(\omega_d t) + c_2 \sin(\omega_d t)) \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

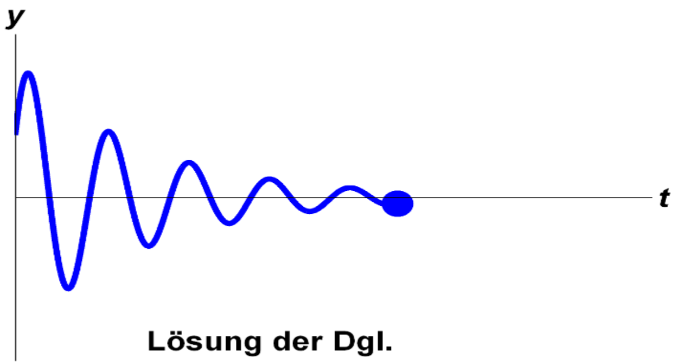
oder die Lösung hat die Form

$$y_h(t) = e^{-\delta t}(C \sin(\omega_d t + \varphi)) \quad \text{ für } C, \varphi \in \mathbb{R}.$$

(dies folgt aus dem Additionstheorem, s. Kapitel 2 (Bilderbuch)):







$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

Lösung und Phasenraum der gedämpften homogenen linearen Differentialgleichung).

https://drive.google.com/file/d/1zznxpvs0N_1Qt7r2MW-8K7mu9i7dgn1J/view?usp=sharing

2. Schritt Partikuläre Lösung $y_p(t)$ aufsuchen:

Wegen $g(t)$ = $y_0 \sin(\omega t)$
machen wir den
Ansatz: Wir nehmen an (s. Tabelle) $y_p(t)$ hat die Form

$$y_p(t) = A \sin(\omega t - \phi)$$

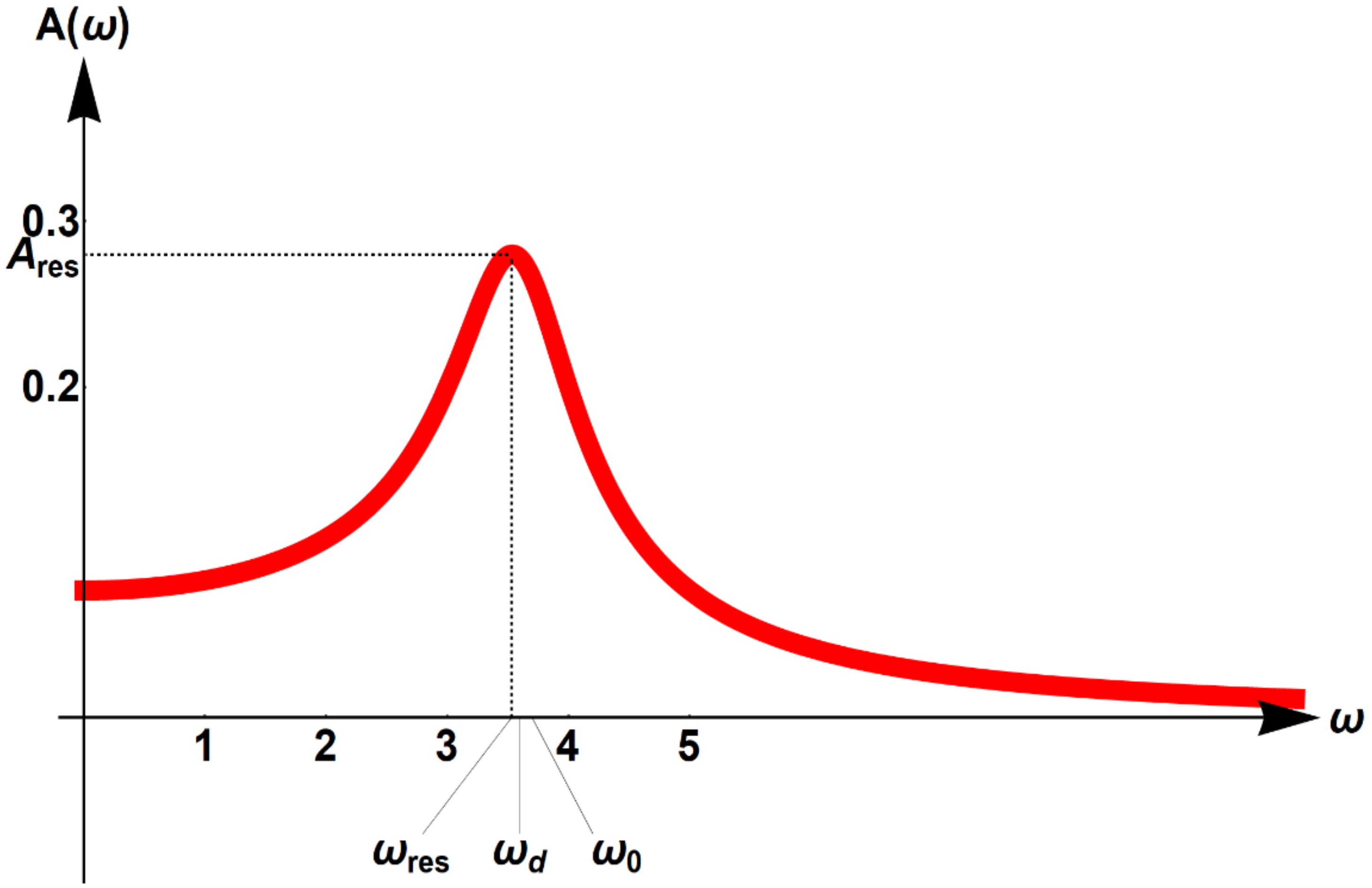
A und ϕ sind gesucht.

Dann ergibt eine Aufwendige Rechnung (siehe VL Manuskript Bilderbuch S.271):

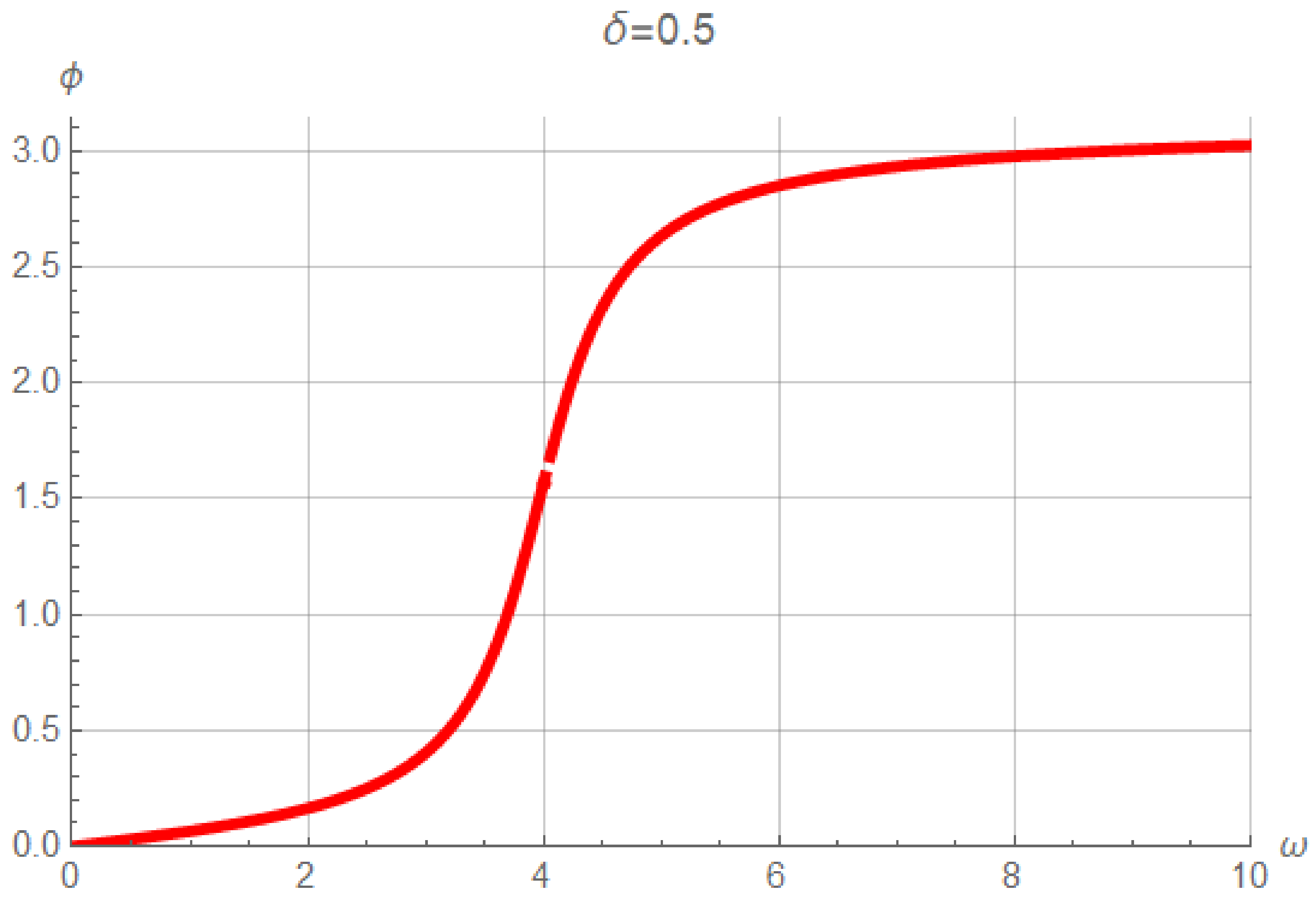
$$A = A(\omega) = \frac{y_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}})$$

und

$$\phi = \phi(\omega) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\right) & \text{für } \omega_0 > \omega \\ \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2} & \text{für } \omega_0 = \omega \\ \arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\right) + \frac{\pi}{2} & \text{für } \omega_0 < \omega \end{cases}$$



$A(\omega)$ **Frequenzgang (Resonanzfunktion)**



δ=0.5
ϕ
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0
2
4
6
8
10
ω

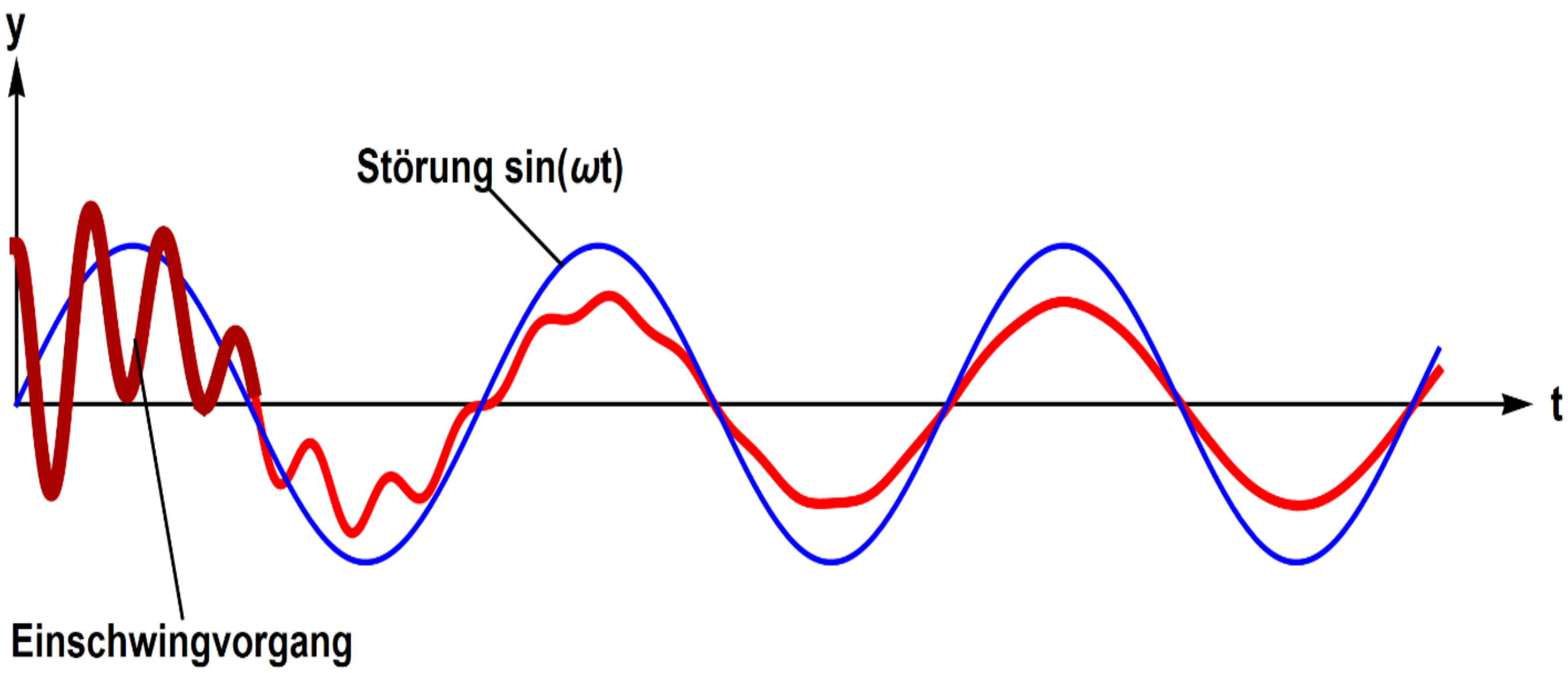
3. Schritt:

Wir haben somit die **allgemeine Lösung** der Schwingungs-DGL

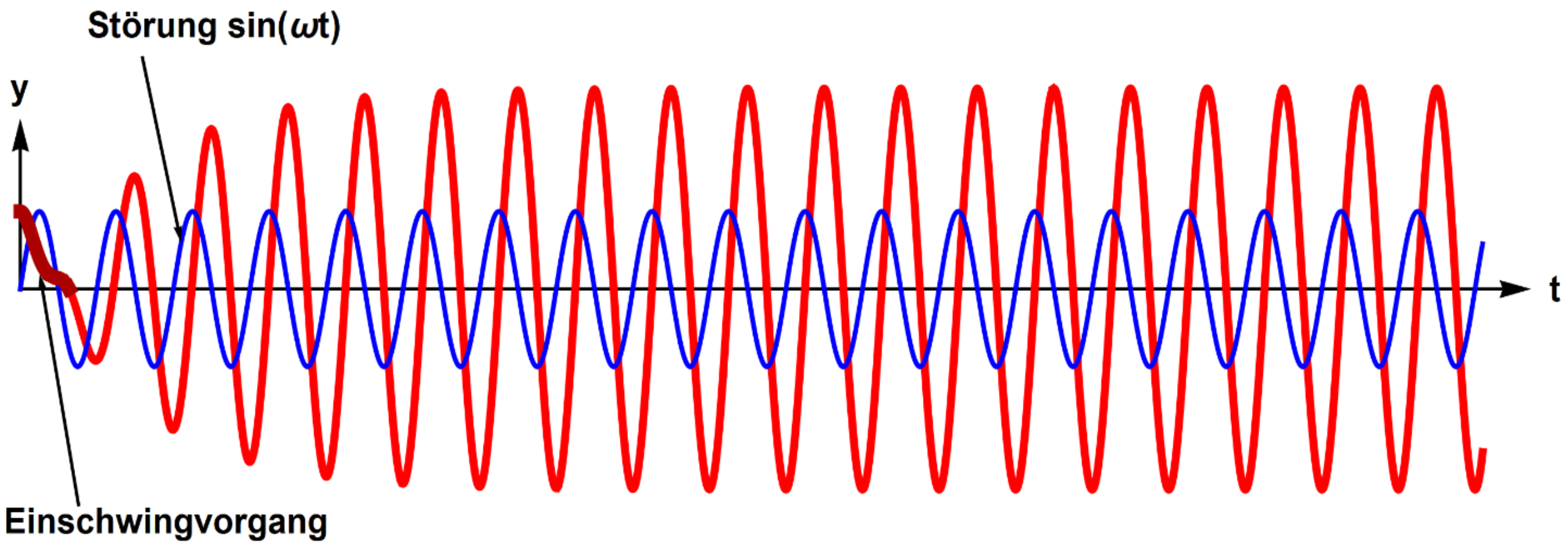
$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) =$$

$$\underbrace{e^{-\delta t}(C\sin(\omega_d t + \varphi))}_{\substack{\text{Einschwingvorgang} \\ \text{(klingt ab)}}} + \underbrace{A(\omega)\sin(\omega t - \phi(\omega))}_{\text{Stationäre Schwingung}}$$

Die Konstanten C und φ werden dann aus den jeweiligen Anfangsbedingungen berechnet.

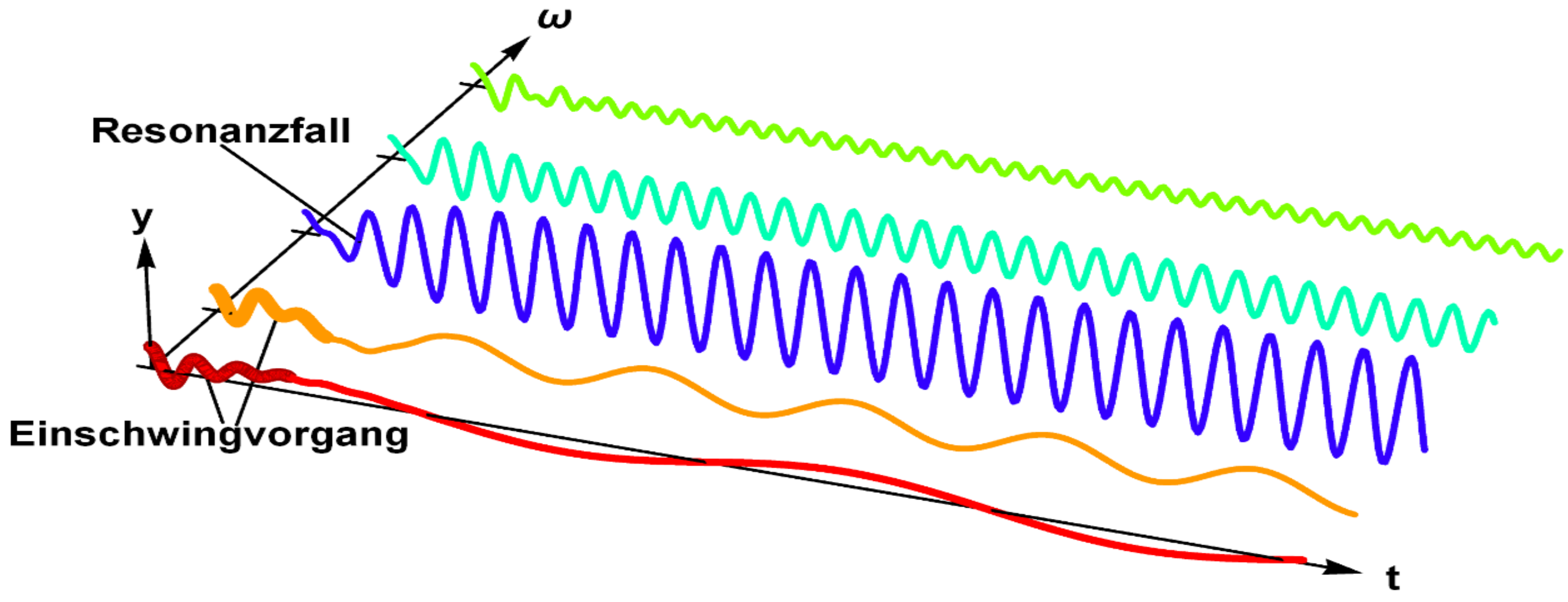


Lösung der Schwingungs-DGL mit Einschwingvorgang und stationärer Schwingung

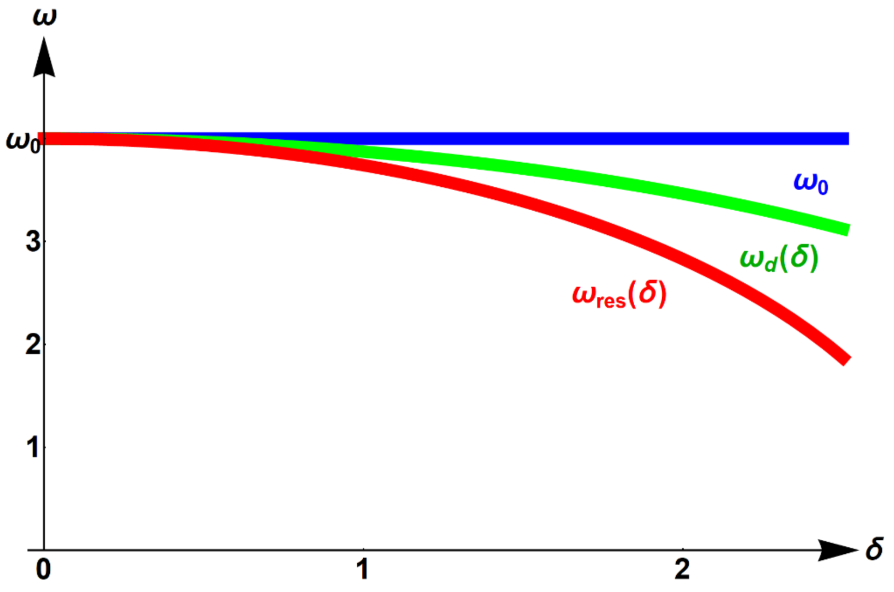


Lösung der SDGL im Resonanzfall (rot). Der Einschwingvorgang (dunkelrot) verschwindet nahezu. Wenn der Einschwingvorgang abgeklungen ist, schwingt das System synchron mit der Störung.

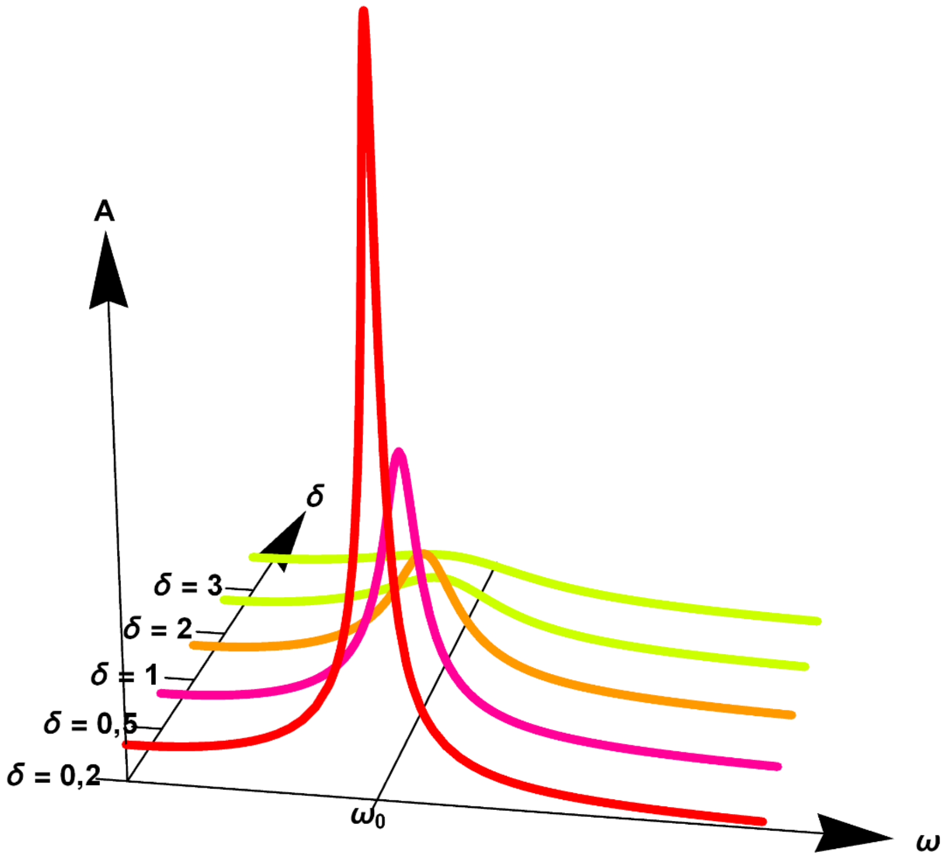
Animation nur mit CDF Player abspielbar:
https://drive.google.com/file/d/1ZaBtekmokynH6fpEHUktloRkx940rf-0/view?usp=sharing



Lösungsverhalten der Schwingungsgleichung in Abhängigkeit der Frequenz der Störfunktion. Die Amplitude der Lösung hat im Resonanzfall ihr Maximum.



Die Resonanzfrequenz wird kleiner, wenn die Dämpfung zunimmt.



Frequenzgang $A(\omega)$ in Abhängigkeit der Dämpfung δ