Integralrechnung im Mehrdimensionalen

1. Teil

Doppelintegrale

Grundidee (Riemann)

- Gegeben seien eine ebene Fläche ohne „Löcher“ $A \subseteq$ R² in der *xy*-Ebene und eine Funktion *z* = $f(x, y))$ > 0 über A .

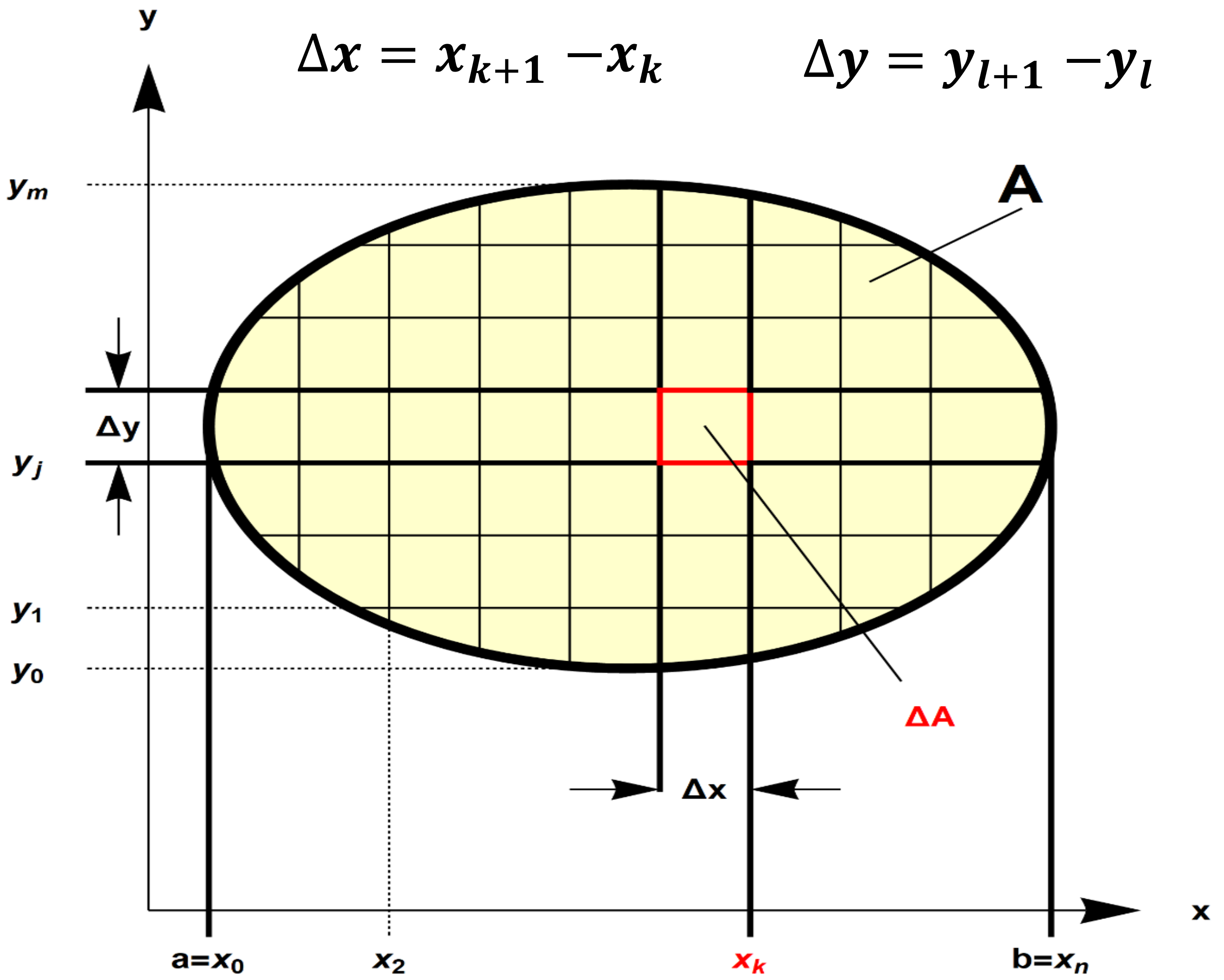
- Dadurch wird ein zylindrischer Körper mit dem „Boden“ A und derFunktion f als „Deckel“definiert.

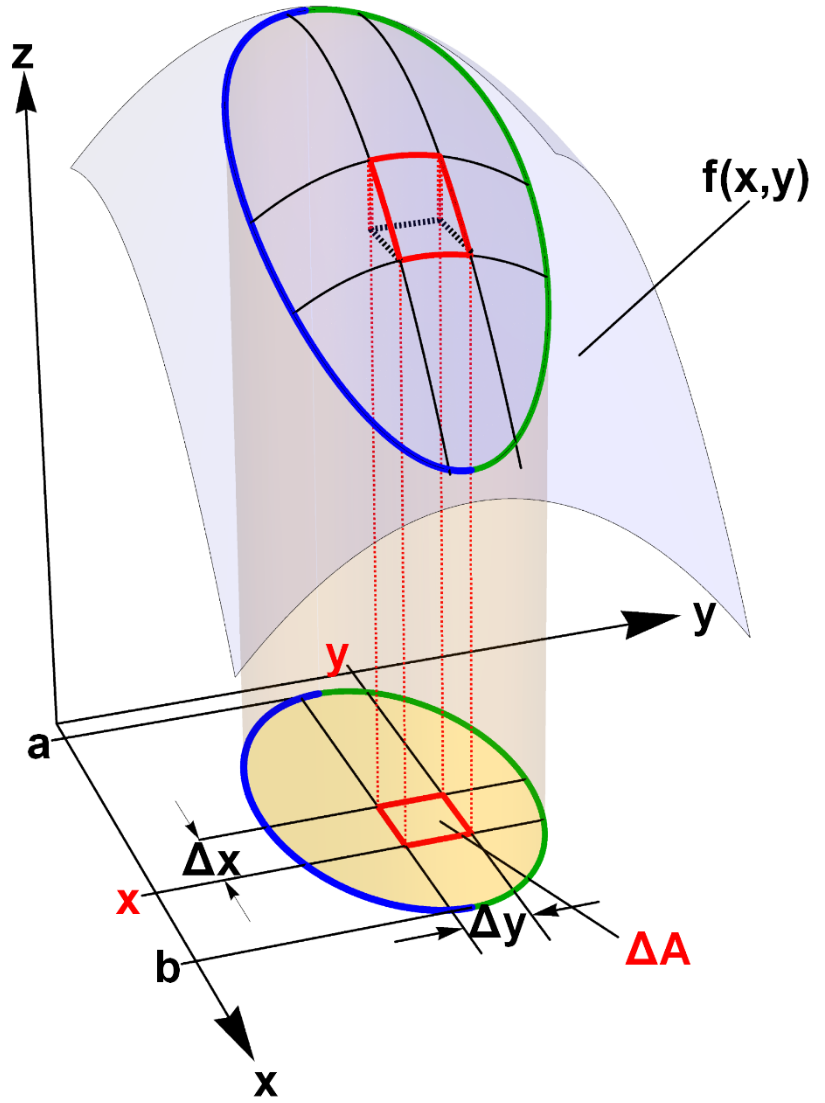
- Das Problem besteht darin, das Volumen des Körpers zu berechnen.

- Zunächst betrachtet man eine Zerlegung der Fläche A in Flächenelemente ΔA

Zerlegung der Fläche A in Flächenelemente ΔA

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k \qquad \Delta y = y_{l+1} - y_l$$





Zusammen mit den *z*-Koordinaten z_{kl} , hat man „Säulen“ mit dem „Profil“ ΔA und dem „Deckel“ *f*(*x*,*y*), (*x*,*y*) $\in \Delta\mathrm{A}$ über der *xy*-Ebene

- Mit $z_{kl} = f(x_k, y_l)$ = konstant in ΔA , wird das Volumen der **Säule approximiert**

  durch das Volumen des **Quaders** mit der Grundfläche ΔA und der Höhe z_{kl}

- die Quadervolumina aufaddiert, ergibt eine Approximation des gesuchten Volumens

$$V \approx \sum_{k,l}^{n,m} z_{kl} \;\; \Delta A$$

- Durch immer feinere Zerlegungen erhält man im Grenzfall

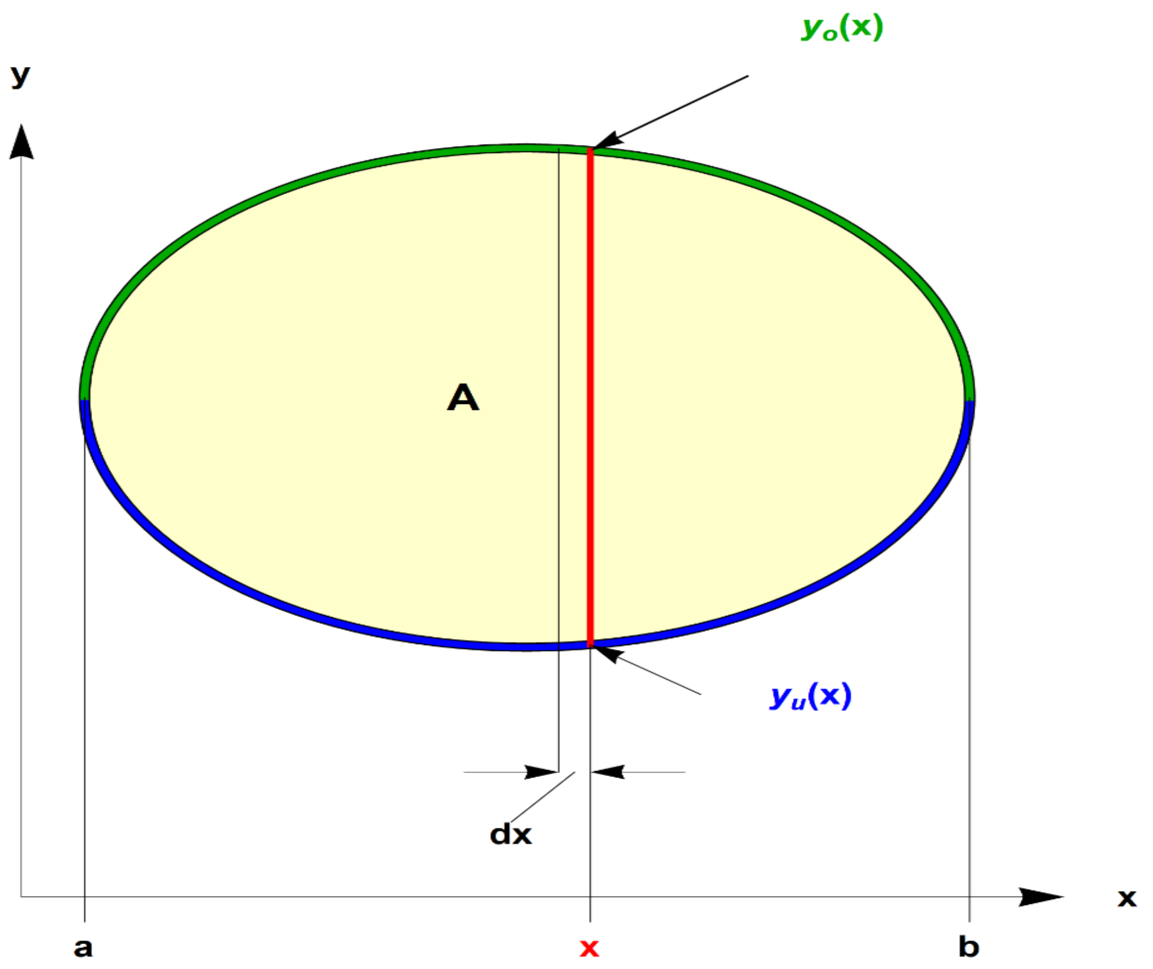
die Definition

$$V = \lim_{n,m \to \infty} \sum_{k,l}^{n,m} z_{kl} \ \Delta A =: \int \int_A f(x,y) dA$$

Riemann Integral in 2D

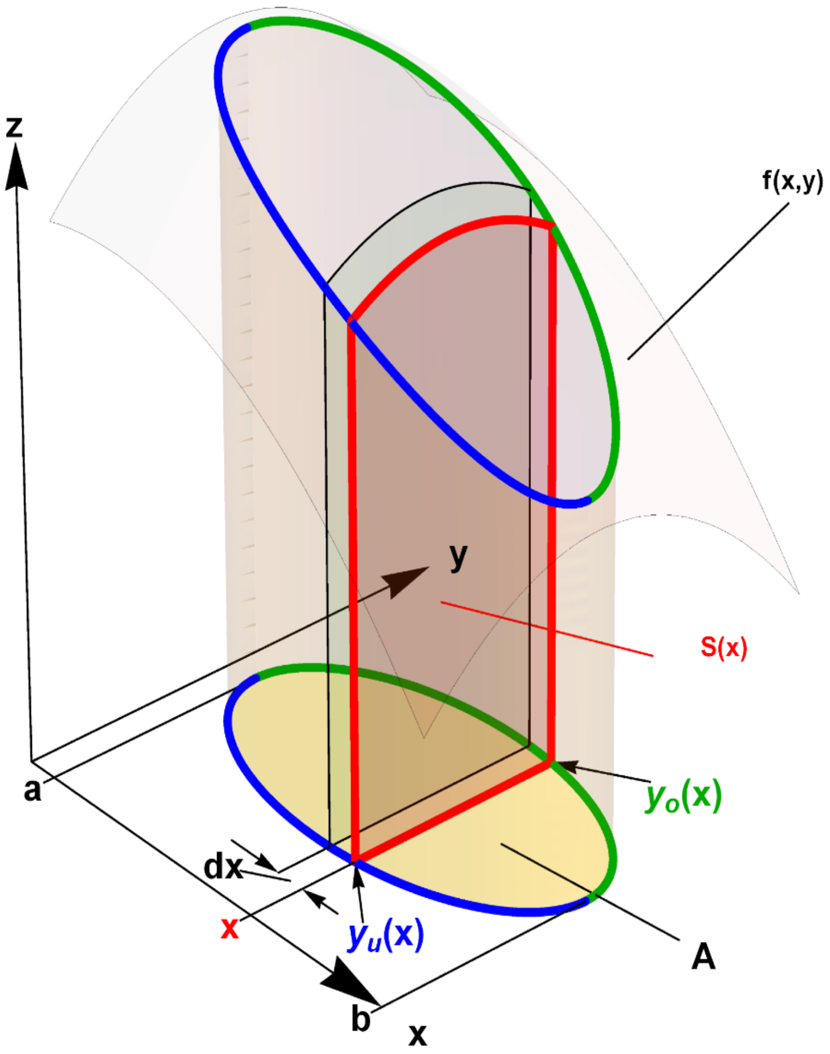
Doppelintegrale mit kartesischen Koordinaten

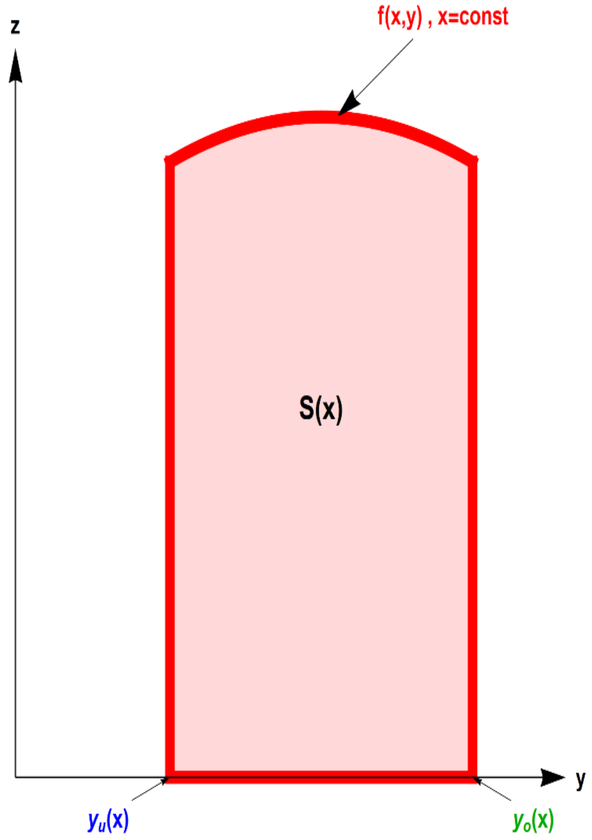
- Die **tatsächliche** Berechnung erfolgt durch zwei ineinander geschachtelte 1D Integrationen.
- Gegeben seien eine ebene Fläche ohne „Löcher“ $A \subseteq$ R² in der *xy*-Ebene und eine Funktion *z* = $f(x, y)$) > 0 über A .
- Dadurch wird ein zylindrischer Körper mit dem „Boden“ A und der Funktion f als „Deckel“definiert.



Die Fläche A beschrieben durch die Grenzen

$$(A) = \begin{pmatrix} y_u(x) \leq y(x) \leq y_o(x) \\ a \leq x \leq b \end{pmatrix}$$





Für ein festes $x \in [a, b]$ entsteht eine Schnittfläche $S(x)$ parallel zur yz-Ebene.

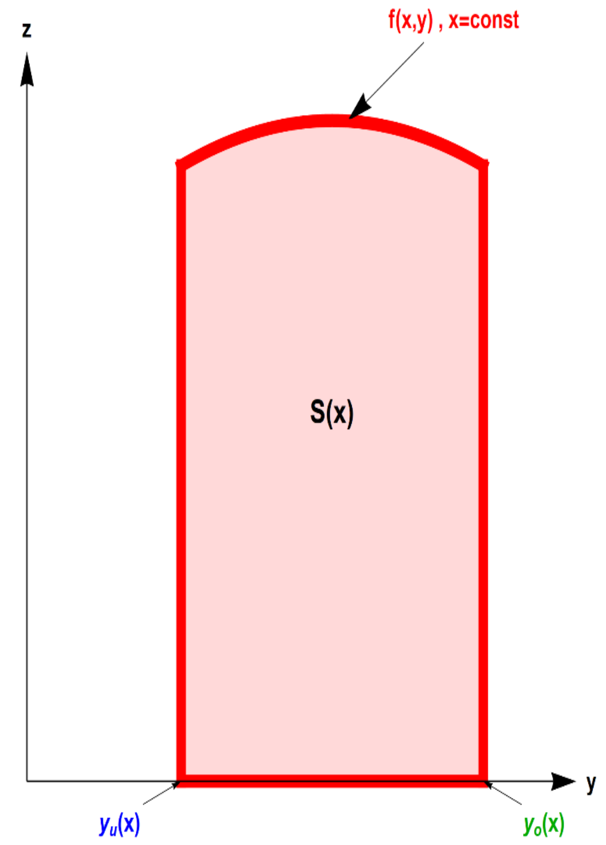
Die Integration erfolgt in 2 Schritten:

1. Schritt: Integration über y

Sei $x \in [a, b]$ konstant.

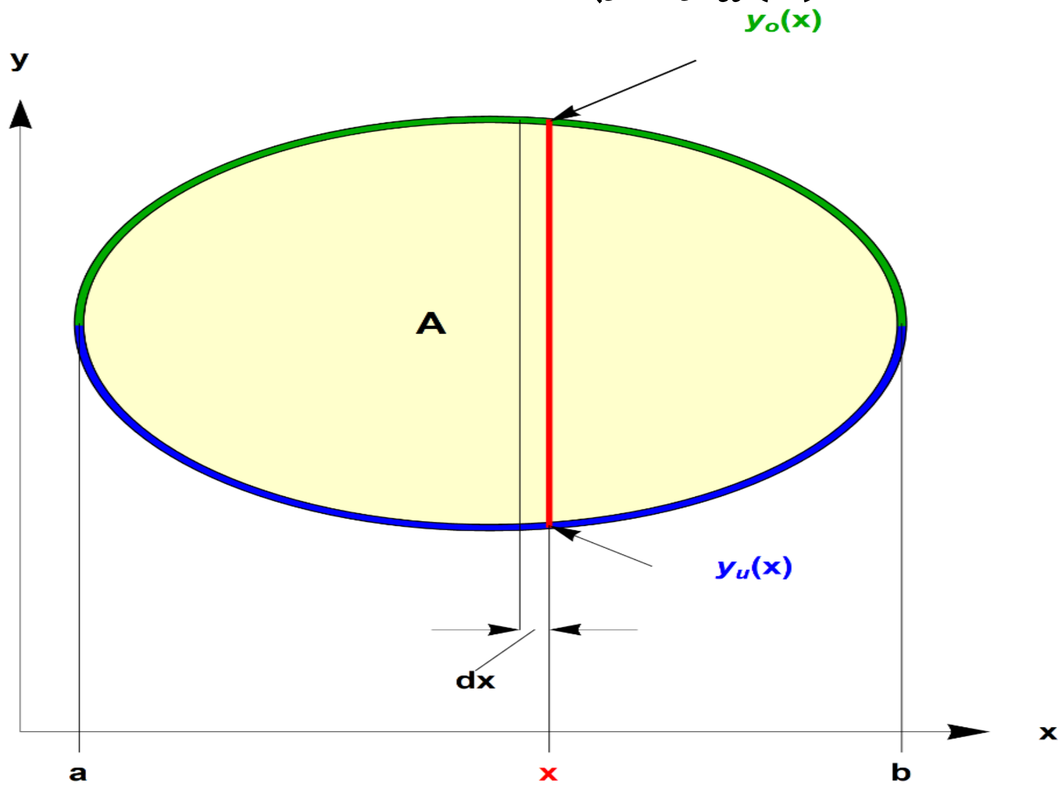
Berechnung der Schnittfläche $S(x)$:

$$S(x) = \int_{y=y_u(x)}^{y=y_0(x)} f(x, y)dy$$



2. Schritt: Integration über *x* ergibt das gesuchte Volumen.

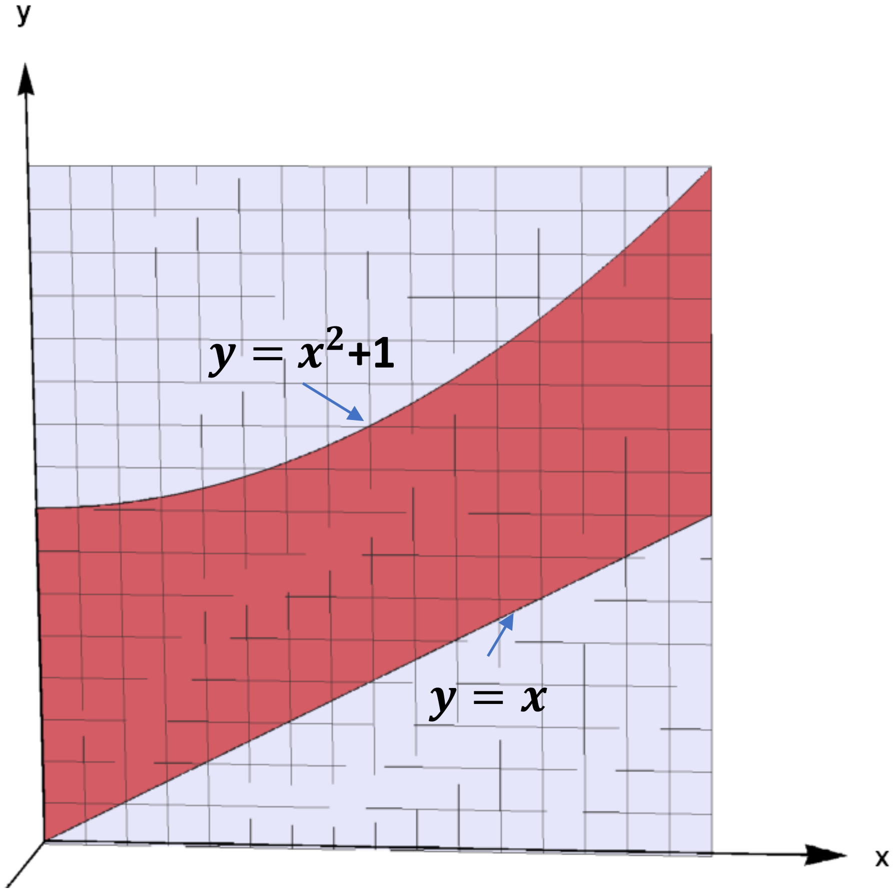
$$V = \int_{x=a}^{x=b} S(x)dx = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=y_u(x)}^{y=y_0(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

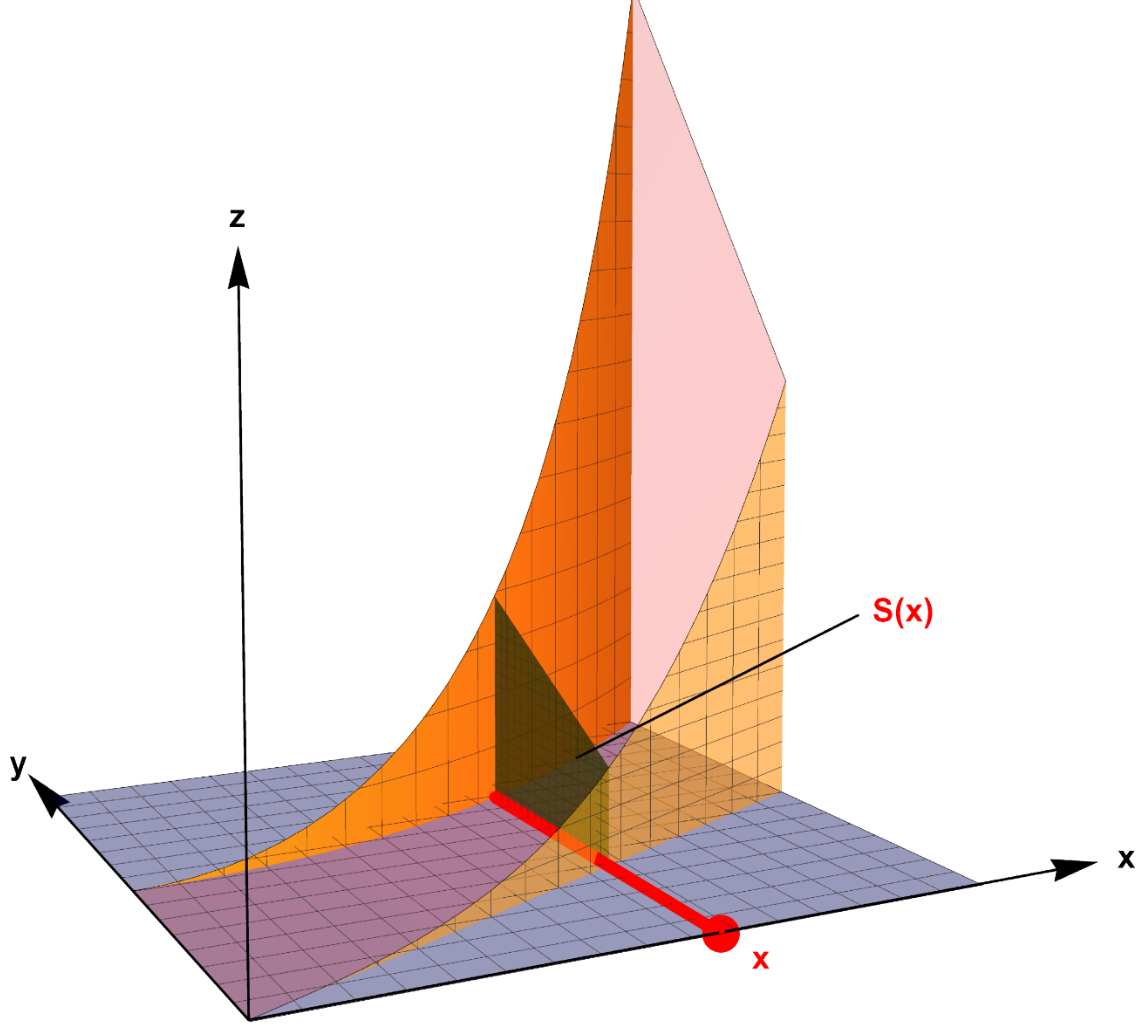


Beispiel 17.1:

Gegeben seien $f(x,y) = x^2 y$ und die Fläche A mit den Grenzen :

$$(A) = \begin{pmatrix} x \leq y(x) \leq x^2+1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{pmatrix}$$





Volumen mit Schnittfläche *S*(*x*), *x* = konstant. Im LINK zu Abb. 17.6 durchläuft die Schnittfläche *S*(*x*) den ganzen Bereich von *x* = 0 bis *x* = 1.

http://sn.pub/cl6W73

1. Schritt: Integration über y

Sei $x \in [0,1]$ konstant. Berechnung der Schnittfläche *S*(*x*):

$$S(x) = \int_{y=x}^{y=1+x^2} x^2\, y\, dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2}\right]_{y=x}^{y=1+x^2} =$$

$$\frac{x^2}{2}\left(1+x^2\right)^2 - \frac{x^4}{2} = \frac{1}{2}\left(x^2 + x^4 + x^6\right)$$

2. Schritt: Integration über x

Integration über *x* ergibt das gesuchte Volumen:

$$V = \int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{2}\left(x^2 + x^4 + x^6\right) dx =$$

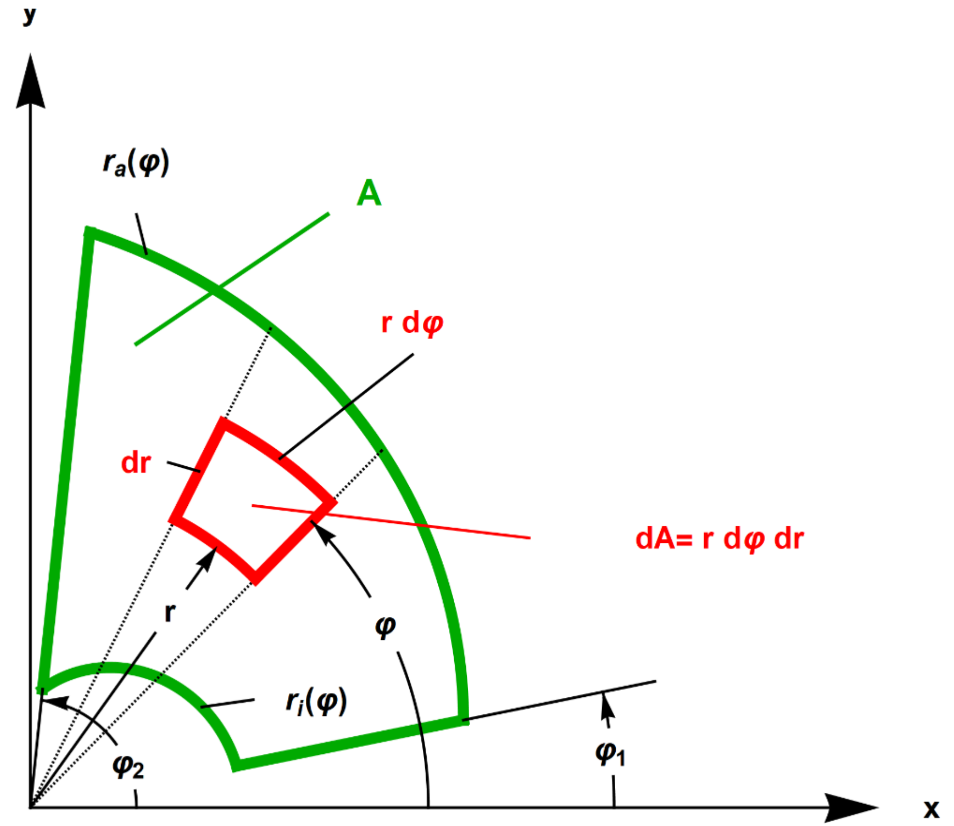
$$\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7}\right]_{x=0}^{x=1} = 0{,}338$$

- Die Integrationsreihenfolge ist im Prinzip vertauschbar

- Dazu muss man aber die Umkehrfunktionen der Randfunktionen ermitteln und als Integralgrenzen einsetzen!

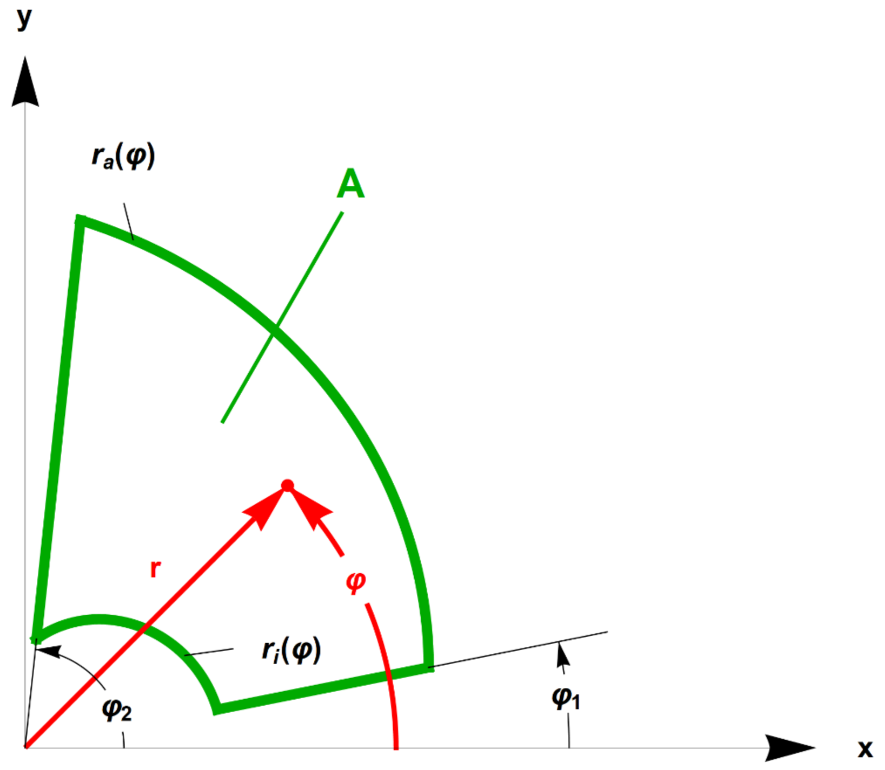
Doppelintegrale mit Polarkoordinaten

Das „Flächenelement $\mathrm{d}A$“ hat „gekrümmte“ Ränder und den Flächeninhalt $dA = r\,d\varphi\,dr$



Die Fläche A wird dann beschrieben durch die Grenzen

$$(A) = \begin{pmatrix} r_i(\varphi) \leq r(\varphi) \leq r_a(\varphi) \\ \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \end{pmatrix}.$$



Eine Funktion f(x,y) über A hat, in Polarkoordinaten die Form

$$\tilde{f}(r,\varphi) = f(r\,cos(\varphi), r\sin(\varphi)).$$

Wir schreiben kurz

$$\tilde{f}(r,\varphi) = f(r,\varphi).$$

Das Volumen eines Körpers mit $f(r,\varphi)$ über der Fläche A wird dann berechnet mit dem Doppelintegral

$$V = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi=\varphi_2} \left(\int_{r=r_i(\varphi)}^{r=r_a(\varphi)} f(r,\varphi)\; r \; dr \right) d\varphi \,.$$

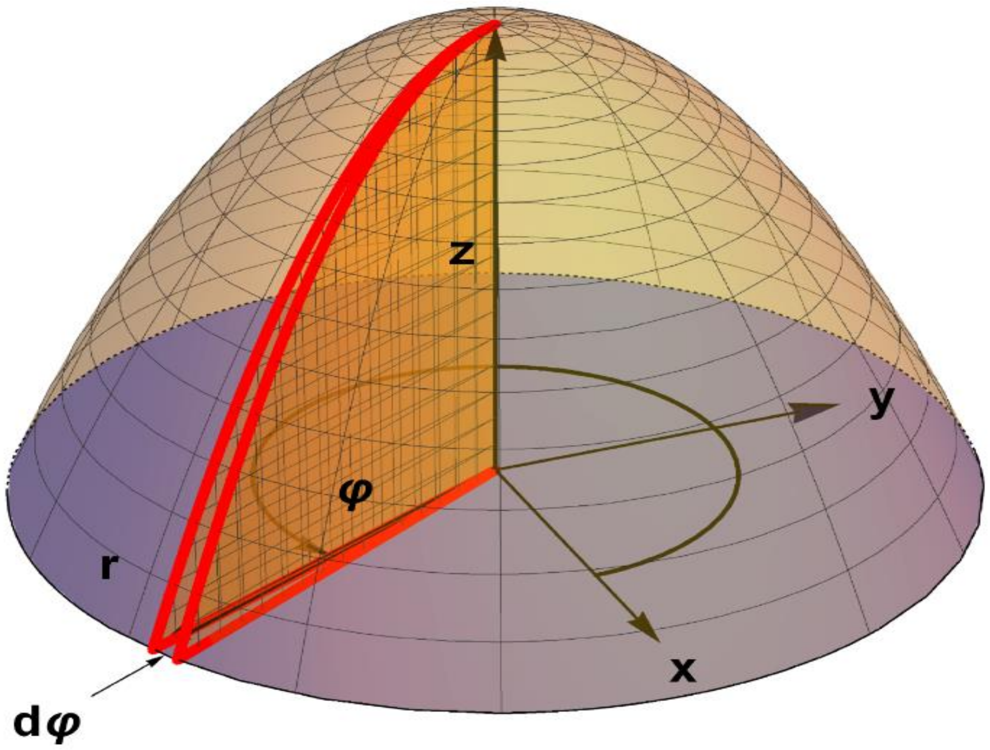
Der Faktor r im Integranden berücksichtigt die „Verzerrung“ der Koordinaten

Er heißt Funktionaldeterminante (s. später)

Beispiel 17.2:

Gegeben sei das Paraboloid $f(r,\varphi) = 1 - r^2$ und die Fläche A, begrenzt durch

$$(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} 0 \leq \mathrm{r}(\varphi) \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{pmatrix}$$



http://sn.pub/F9QZ2og

Das Volumen des Paraboloids ist dann:

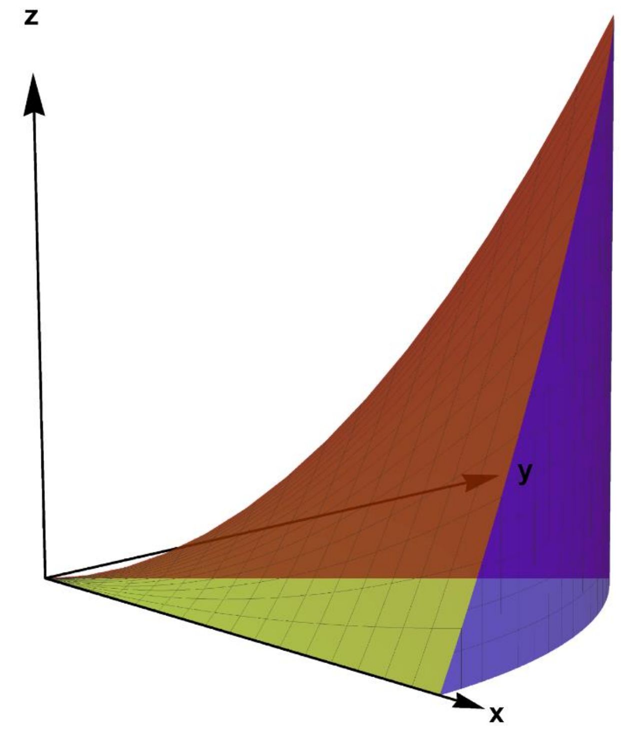
$$V = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=1} f(r)\, {\color{red} r}\, dr \right) d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=1} (1 - r^2)\, {\color{red} r}\, dr \right) d\varphi \; =$$

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\frac{1}{4} \right) d\varphi \; = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Beispiel 17.4:

Gegeben: der Körper mit dem Deckel $f(r,\varphi) = r^2 \cos(\varphi)\sin(\varphi)$ und der Fläche A, begrenzt durch

$$(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} 0 \le \mathrm{r}(\varphi) \le 2 \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$



http://sn.pub/jwOjDb

Das Volumen des Körpers ist dann:

$$= \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} \left(\int_{r=0}^{r=2} f(r,\varphi) r \, dr \right) d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} \left(\int_{r=0}^{r=2} r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \, r \, dr \right) d\varphi =$$

$$= \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} \cos(\varphi) \sin(\varphi) \, d\varphi \right) \left(\int_{r=0}^{r=2} r^3 \, dr \right) = \left(\frac{(\sin(\varphi))^2}{2} \Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} \right) 4$$

$$= 2 \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)^2 = 1.$$