3.1 Faltung,Deltafunktion, Beispiele

H.L.Cycon

Vorbemerkung

Die Menge der Zeitdarstellungen M_z sowohl als auch die Menge M_F der zugehörigen Frequenzdarstellungen sind lineare Räume mit weiteren Strukturen (genauer : Hilberträume^{+})), d.h. Addition und Multiplikation mit Skalaren sind definiert. Ebenso gibt es in beiden Räumen die einfache Multiplikation zweier Funktionen.

$^{+}$) z. B. Signale mit endlicher Energie $L^2 = \left\{ \mathrm{f} \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt < \infty \right\}$

Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ bzw. ihre Rücktransformation $\mathcal{F}^{-1}$ sind „strukturerhaltende“ eineindeutige lineare Abbildungen zwischen diesen Räumen M_z und M_F.

$$\boxed{M_Z} \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} \boxed{M_F}$$

$$\mathcal{F}\ \text{ist} \begin{cases} \text{eineindeutig, linear} \\ \text{strukturerhaltend} \end{cases}$$

Die Faltungssätze

- Der ***erste Faltungssatz*** besagt nun , dass die Multiplikation zweier Funktionen $f_1(t) \cdot f_2\,(t)$im Raum M_z mit der Fouriertransformation $\mathcal{F}$ in eine „ Faltung“ $F_1 * F_2(\omega)$ im Raum M_F abgebildet wird (Bis auf einen Faktor 1/2Pi).

- Entsprechend besagt der ***zweite Faltungssatz*** dass die Multiplikation zweier Funktionen $F_1(\omega) \cdot F_2\,(\omega)$ im Raum M_F mit der Fourier-Rücktransformation $\mathcal{F}^{-1}$ in eine „ Faltung“ $f_1 * f_2\,(t)$ im Raum M_z abgebildet wird.

Abbildungseigenschaft der Faltungssätze

(1) $$f_1(t)\cdot f_2(t) \;\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet}\; \frac{1}{2\pi}\left(F_1(\omega) * F_2(\omega)\right) =: \tilde{F}(\omega)$$

(2) $$F_1(\omega)\cdot F_2(\omega) \;\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ}\; f_1(t) * f_2(t) =: \tilde{f}(t)$$

Definition der Faltung

Im Zeitraum gilt

$$\tilde{f}(t) = f_1(t) * f_2(t) := \int_R f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau$$

$(\tau \to (t-\tau) = \text{Spiegelung \& Verschiebung um t}) \longrightarrow$ „Faltung“

und analog wird im Frequenzraum definiert

$$\tilde{F}(\omega) = F_1(\omega) * F_2(\omega) := \int_R F_1(u) \cdot F_2(\omega - u) du$$

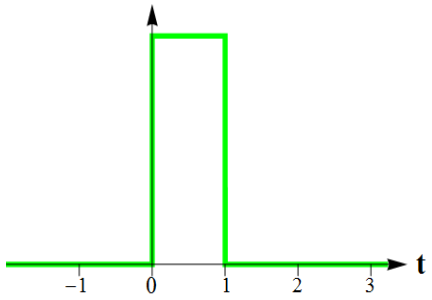
Eigenschaften der Faltung :

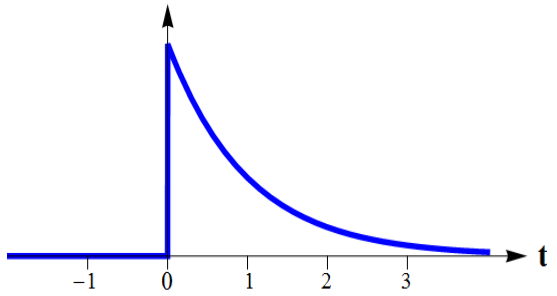
Die Faltung $*$ ist

- kommutativ $f * g = g * f$
- assoziativ $f * (g * h) = (f * g) * h$
- linear $(\alpha f + \beta g) * h = \alpha f * h + \beta g * h \ , f ür \ \alpha, \beta \epsilon R$

Beispiel 5 (zur Faltung) : Betrachte die beiden Funktionen

$$f_1(t) = \mathrm{re(t)} = \begin{cases} 1 & f\ddot{u}r\ \ t\epsilon\ (0,1] \\ 0 & sonst \end{cases} \quad \text{und} \quad f_2(t) = \sigma(t)e^{-t} = \begin{cases} e^{-t} & f\ddot{u}r\ \ t \geq 0 \\ 0 & f\ddot{u}r\ \ t < 0 \end{cases}$$



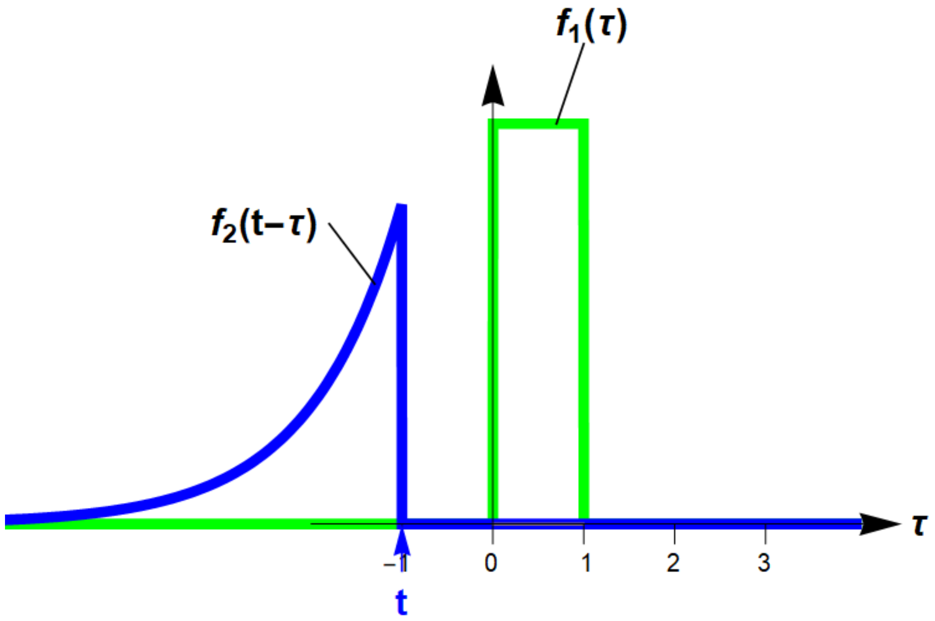


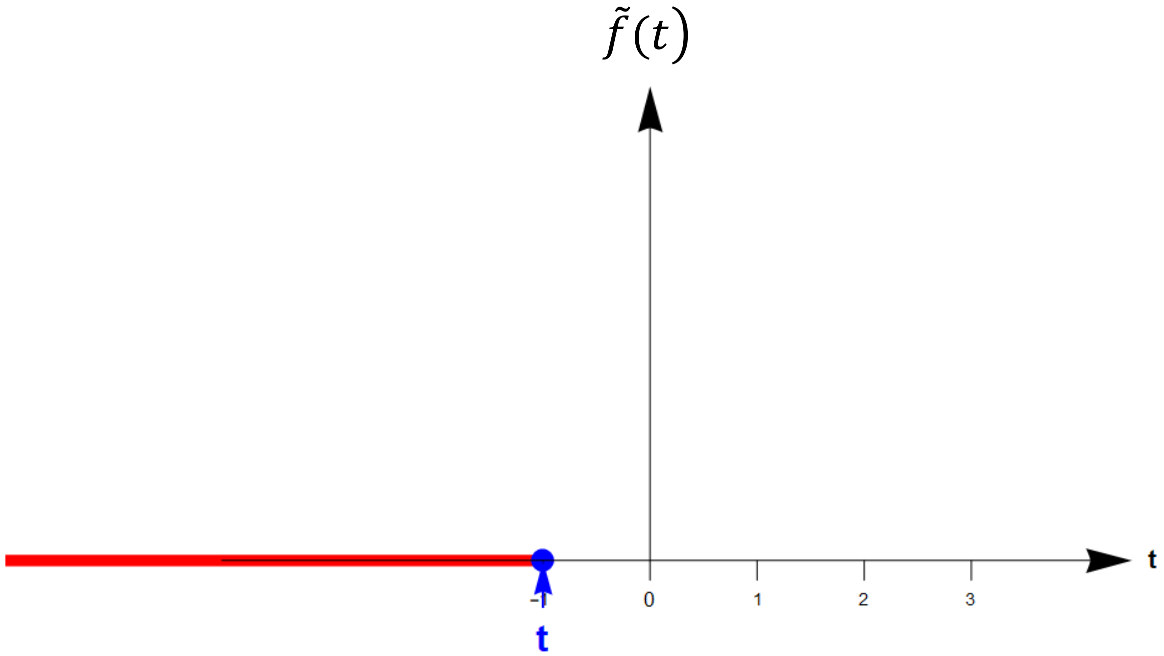
Dann ist

$$\tilde{f}(t) := f_1(t) * f_2(t) = re(t) * \sigma(t)e^{-t} = \int_R re(\tau) \cdot \sigma(t-\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau$$

Es gibt dann 3 Fälle:

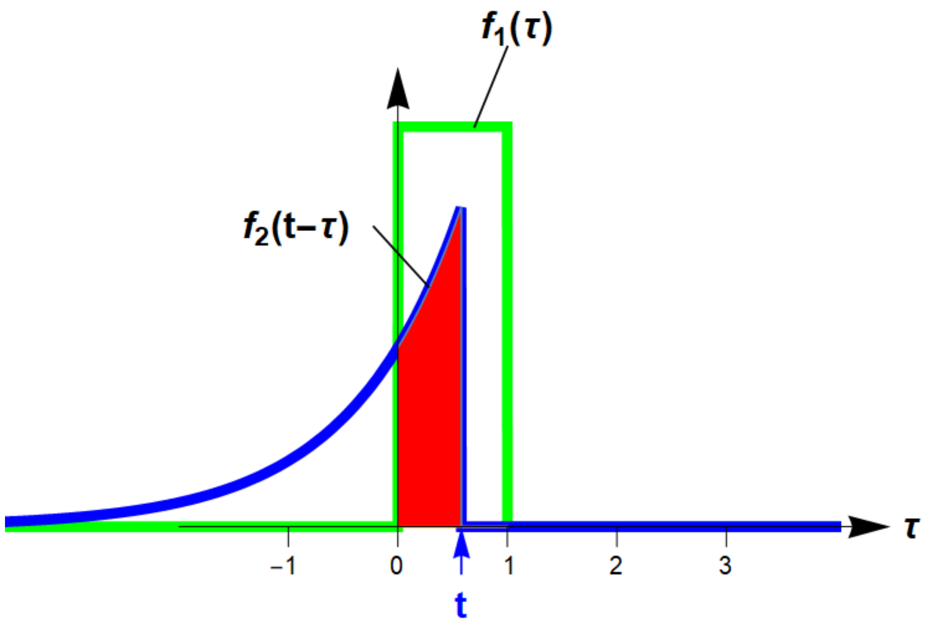
Fall 1: $t < 0$ dann ist $\tilde{f}(t) := 0$ da $f_1(\tau)$ und $f_2(t-\tau)$ disjunkten Träger haben.

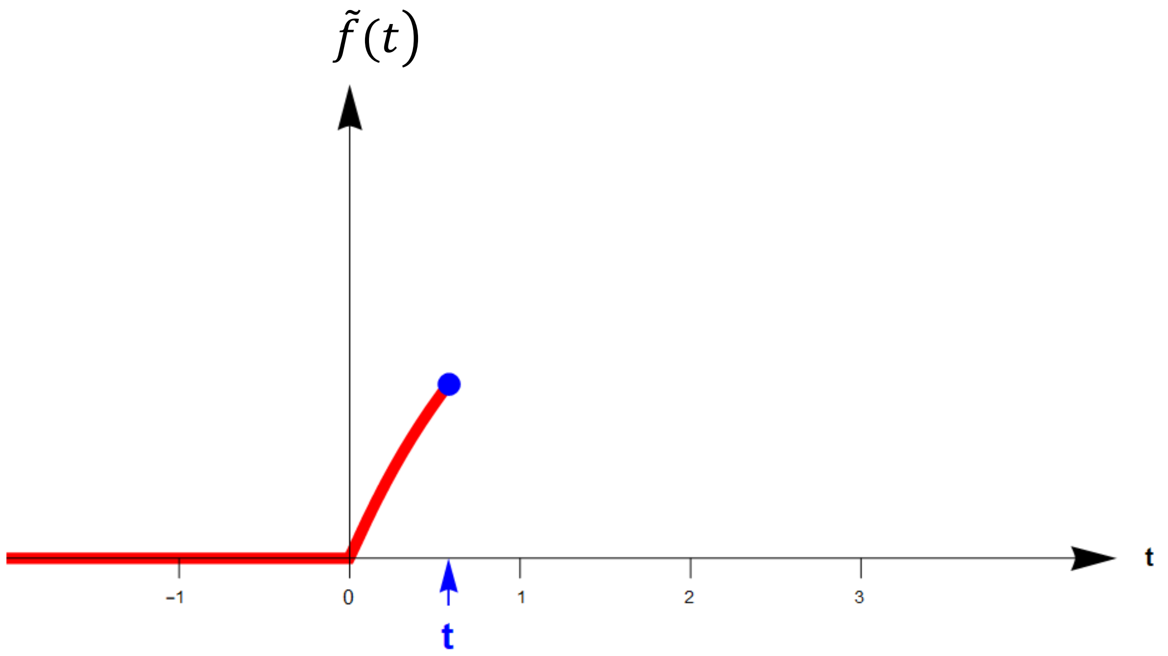




Fall 2: t∈ [0,1] , dann ist

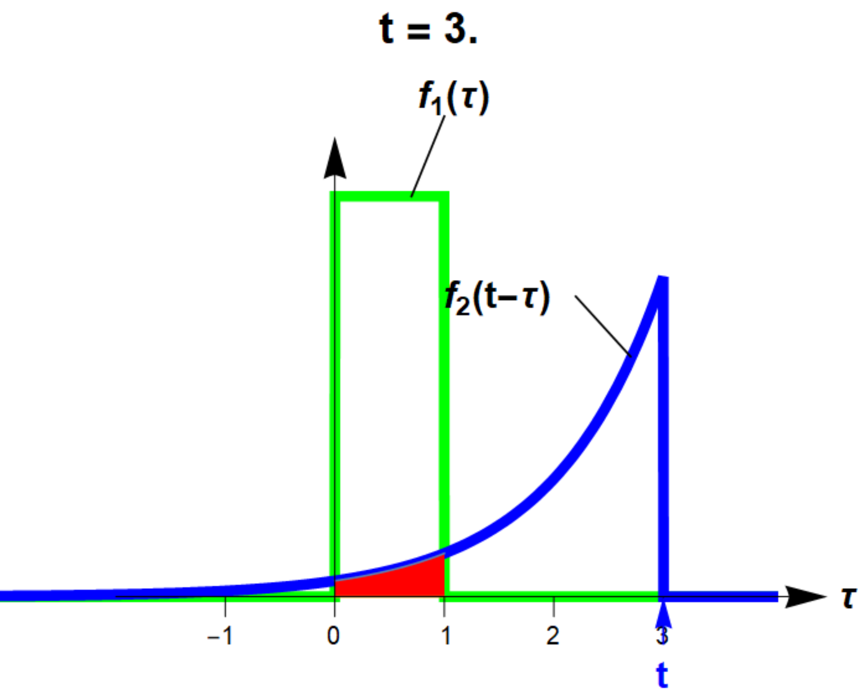
$$\tilde{f}(t) = \int_0^t 1\, e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{\tau}\, d\tau = e^{-t} [e^{\tau}]_{\tau=0}^{\tau=t} = e^{-t}[e^{t} - 1] = 1 - e^{-t}$$

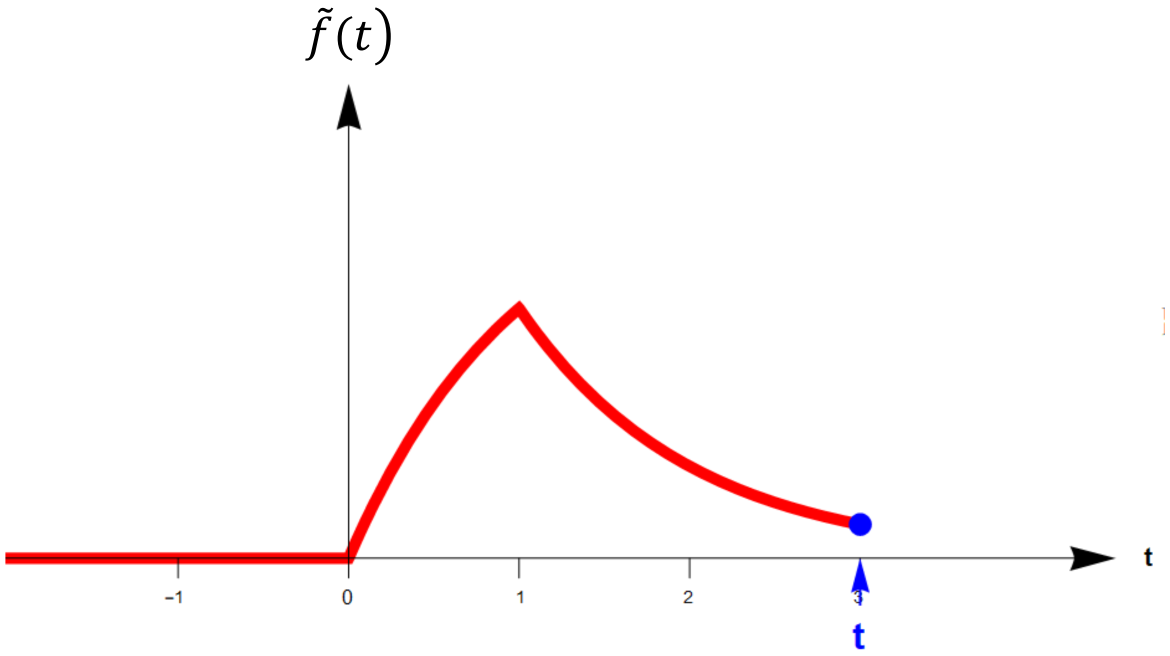


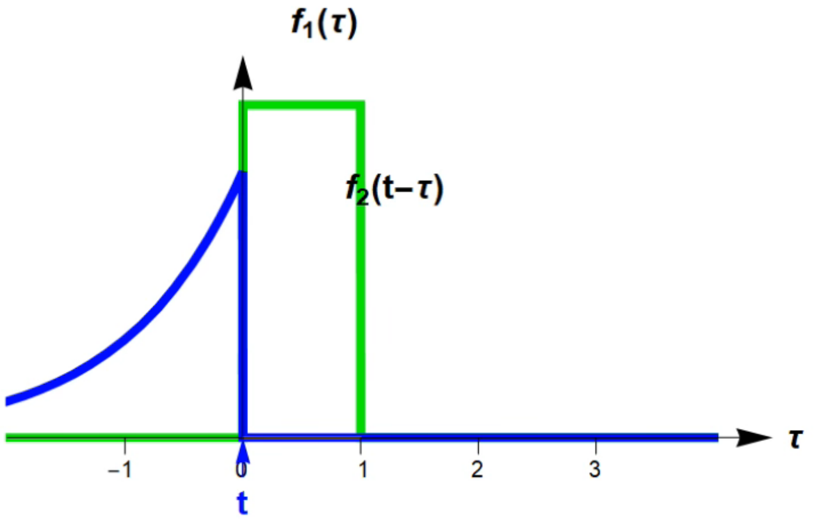


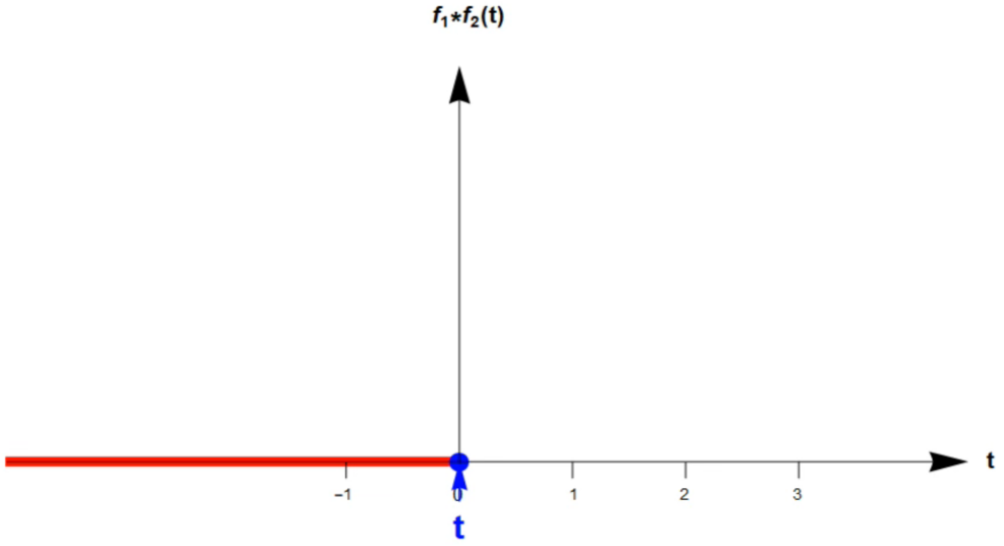
Fall 3: $t \geq 1$, dann ist

$$\tilde{f}(t) = \int_0^1 1\, e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} \int_0^1 e^{\tau}\, d\tau = e^{-t}[e^{\tau}]_{\tau=0}^{\tau=1} = e^{-t}[e-1]$$





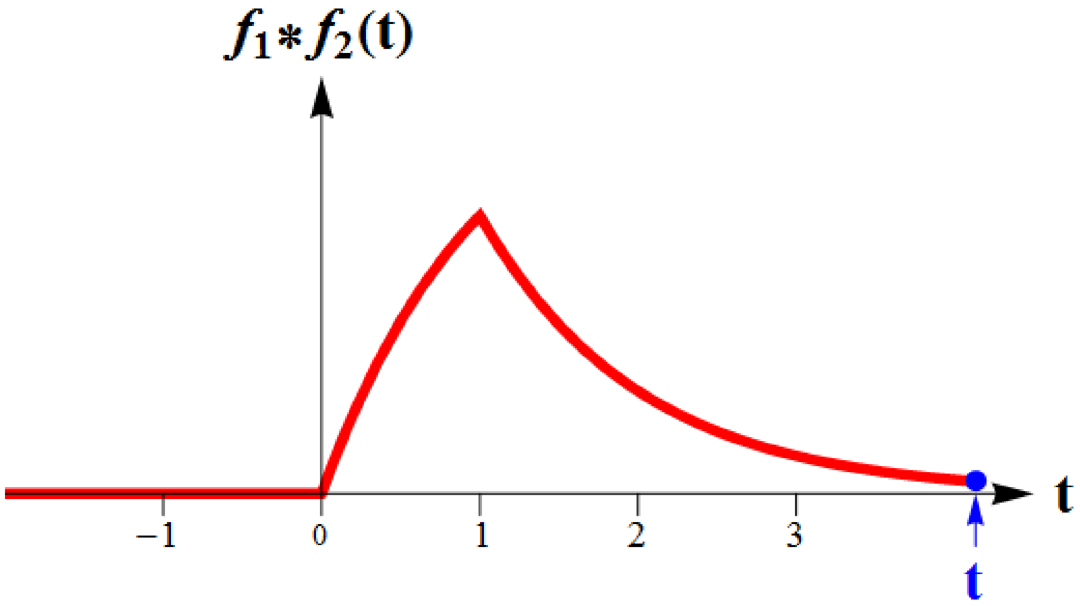




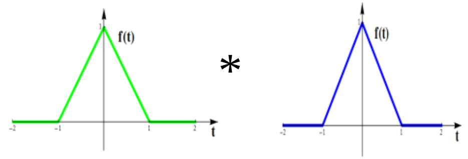
http://sn.pub/PYhoeb

Also gilt :

$$\tilde{f}(t) = f_1 * f_2(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ für } \ t < 0 \\ 1 - e^{-t} & , \text{ für } t \in [0,1] \\ [e-1]e^{-t} & , \text{ für } \ t > 1 \end{cases}$$



Beispiel 6 (Faltung der Dreiecksfunktion f mit sich selbst):



Sei also

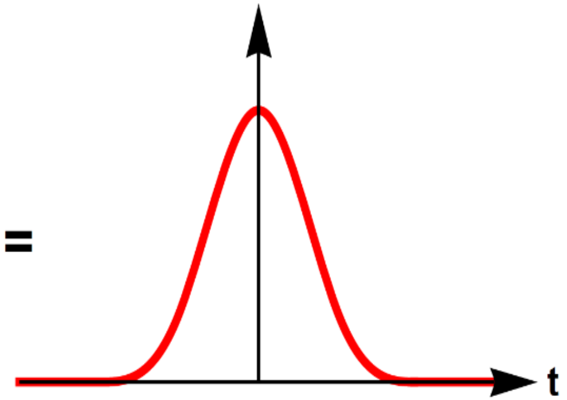
$$f(t)=\begin{cases} t+1 & , \textit{für } \ t\in[-1,0] \\ -t+1 & \textit{für } \ t\in[0,1] \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

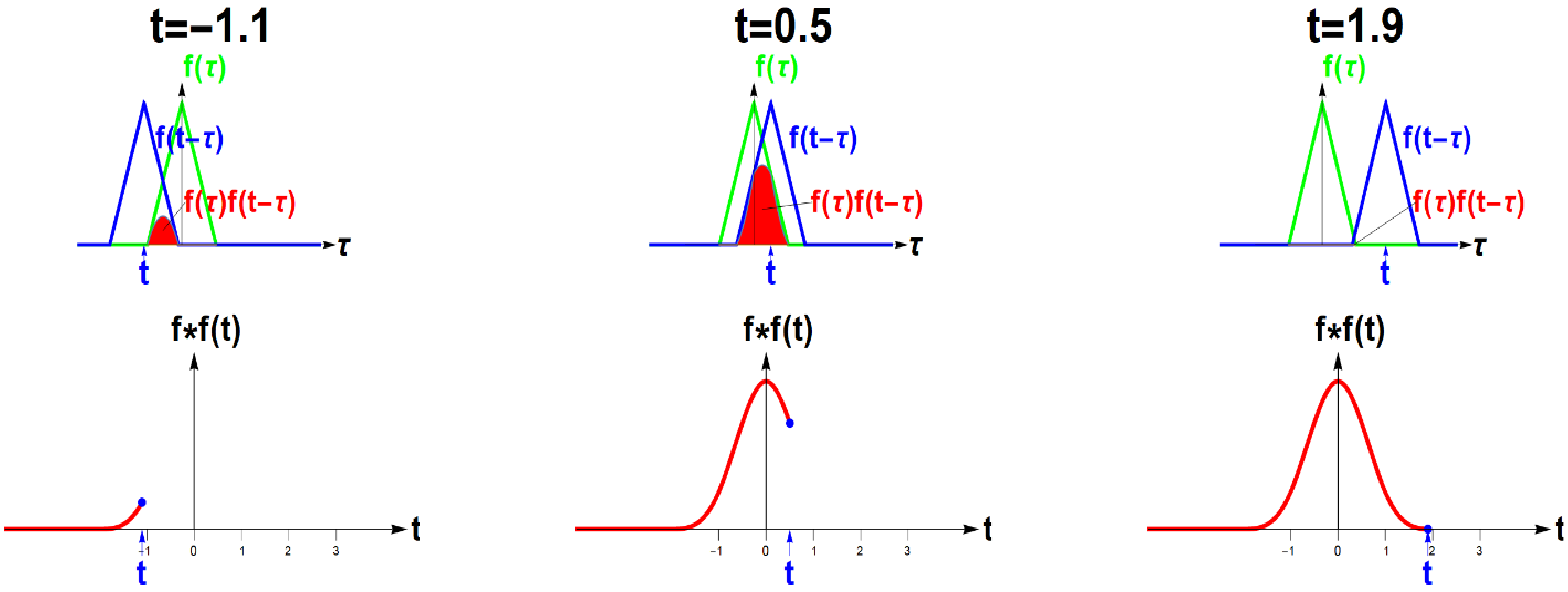
Dann ist: $$\tilde{f}(t)= f(t) * f(t) = \int_R f(\tau)\ f(t-\tau)\,d\tau$$

Und es gibt 6 Fälle (analog zu Beispiel 5):

$$\tilde{f}(t) = (f * f)(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} & t < -2 \\ \dfrac{t^3}{6} + t^2 + 2t + \dfrac{4}{3} & \text{für} & t \in [-2,-1] \\ \dfrac{2}{3} - t^2 - \dfrac{t^3}{2} & \text{für} & t \in [-1,0] \\ \dfrac{2}{3} - t^2 + \dfrac{t^3}{2} & \text{für} & t \in [0,1] \\ -\dfrac{t^3}{6} + t^2 - 2t + \dfrac{4}{3} & \text{für} & t \in [1,2] \\ 0 & \text{für} & 2 < t \end{cases}$$

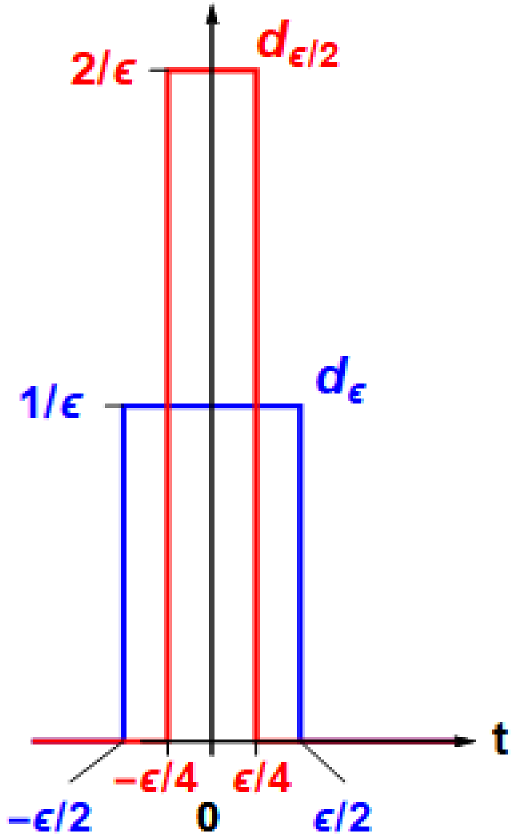
=





http://sn.pub/IDQdY8

Diracsche (Delta-) Funktion



Betrachte die Funktion

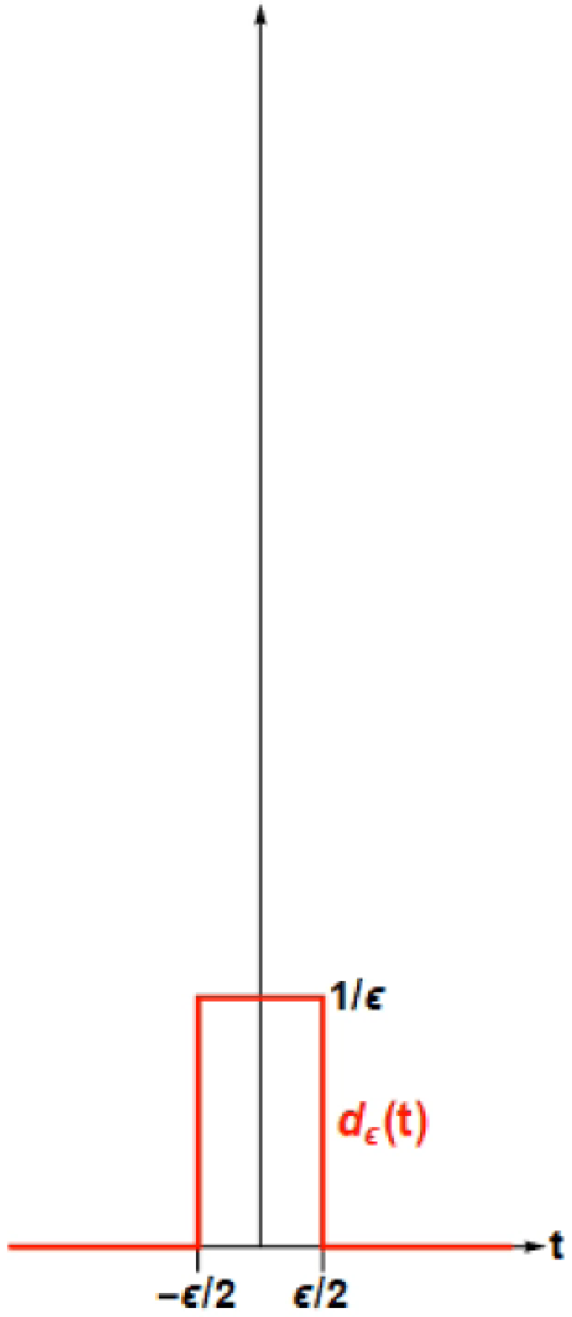
$$d_\varepsilon(t) := \begin{cases} 1/\varepsilon \;\; für \;\; t \epsilon \left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right] \\ 0 \;\; für \;\; t \qquad sonst \end{cases} \;;$$

wenn ε kleiner wird steigt der Wert $1/\varepsilon$ und die Basis $\left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]$ wird schmaler

Im Grenzwert $\varepsilon \to 0$ entsteht eine „verallgemeinerte Funktion“ δ:

$$d_\varepsilon(t) \to \delta(t), \qquad für \;\; \varepsilon \to 0$$

δ heißt ***Diracsche Funktion*** oder ***Deltafunktion***



http://sn.pub/sfrIPB

Formale Defintion der Diracschen (Delta-) Funktion $\delta(t)$

δ wird definiert durch die Eigenschaften:

$$\boxed{\begin{cases} (1) \quad \delta(t) = 0 \quad \textit{für} \quad t \neq 0 \\ (2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \end{cases}}$$

Formale Schreibweise :

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad t \neq 0 \\ \infty & \textit{für} \quad t = 0 \end{cases}$$

Verschobene $\delta(t)$ Funktion :

$$\delta(t - t_0) := \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad t_0 \neq \mathrm{t} \\ \infty & \textit{für} \quad t_0 = \mathrm{t} \end{cases}$$

Eigenschaften der δ Funktion

Faltung mit δ: $$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

Das heißt die Deltafunktion δ bildet bezüglich der Verknüpfung $*$ die „Eins“

Insbesondere gilt $$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t_0)$$

Fouriertransformation der Deltafunktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t} dt = e^{0} = 1(\omega)$$

das heißt:

$$\delta(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} 1(\omega)$$

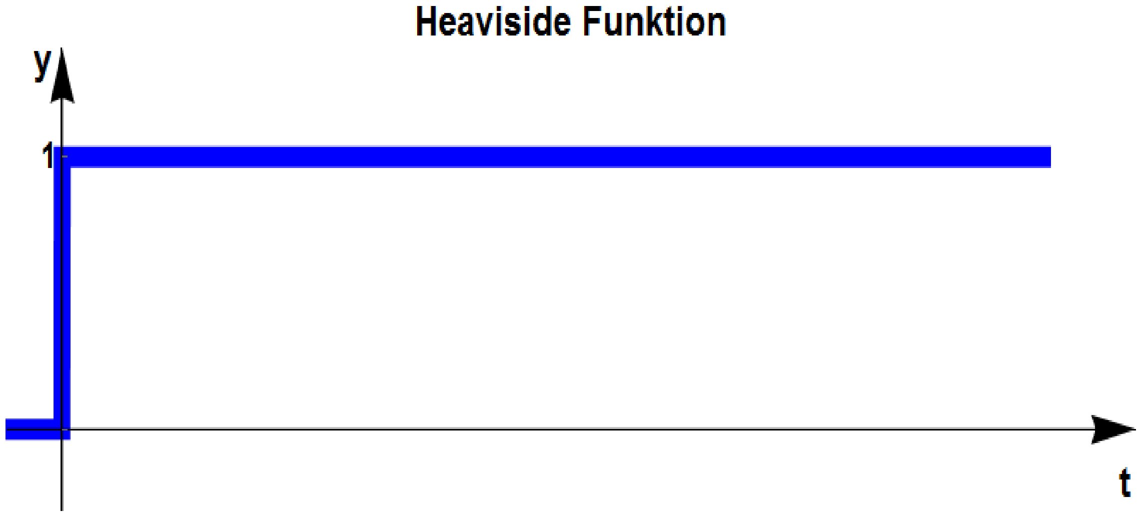
und es folgt⁺):

$$1(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} 2\pi \cdot \delta(\omega)$$

⁺) s. Vertauschungssatz 3.2,

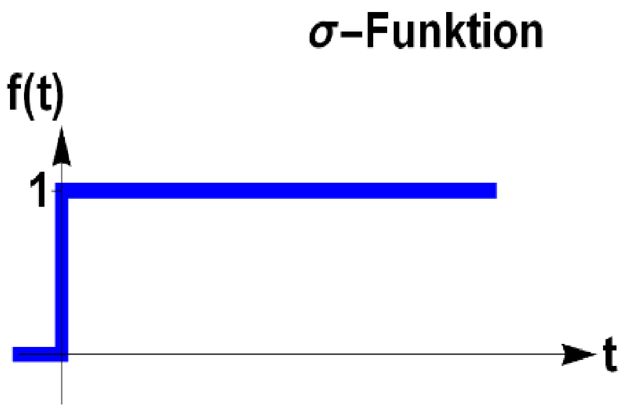
Beispiel 3 (Fortsetzung): (Heaviside Funktion)

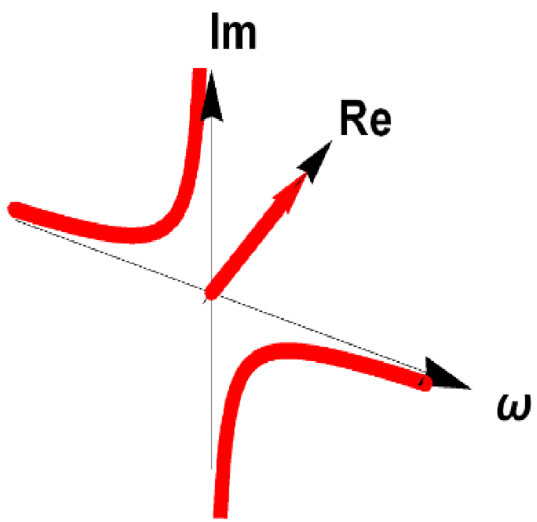
Mit etwas Aufwand kann man nun auch zeigen, daß auch die Heaviside Funktion eine Fouriertransformierte hat:



Dann gilt:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & für\ \ t < 0 \\ 1 & für\ \ t \geq\ 0 \end{cases} \quad \circ\!\!\overset{\mathcal{F}}{-\!\!\!-\!\!\!-}\!\!\bullet \quad F(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)$$





$$\sigma(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$