Differentialgleichungen
7. Teil

Inhomogene Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Zunächst die Definition (WH)

Die Differentialgleichung

$$y'' + a\,y' + b\,y = g(x) \quad \text{, a, b} \in \mathbb{R}\text{, mit } g(x) \text{ gegeben}$$

heißt

(1) ***lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten***

(2) $g(x)$ heißt ***Störfunktion*** oder ***Inhomogenität.***

(3) Wenn $g = 0$ ist, dann heißt die Differentialgleichung ***homogen,*** wenn $g \neq 0$ ist, heißt sie ***inhomogen.***

Die **Lösungsmenge $\mathbf{L_h}$** der homogenen Differentialgleichung

$$y'' + a\,y' + by = 0,\ \text{a, b} \in \mathbb{R}\,,$$

hat folgende Eigenschaften (WH) :

(E1) Die Menge aller Lösungen L_h von der h DGL ist ein linearer Raum (Vektorraum).

(E2) Die Dimension des Raumes L_h ist d = 2.

(E3) Wenn y_1 und $y_2 \in L_h$ und W(x) $\neq$ 0, dann bilden $\{y_1, y_2\}$ eine Basis im linearen Raum L_h .

(E4) Wenn y(x) = Re[y(x)] + j Im[y(x)] eine komplexwertige Lösung der DGL ist,dann sind auch Re[y(x)] und Im[y(x)] (reell wertige) Lösungen.

Lösung der inhomogenen DGL 2.O.

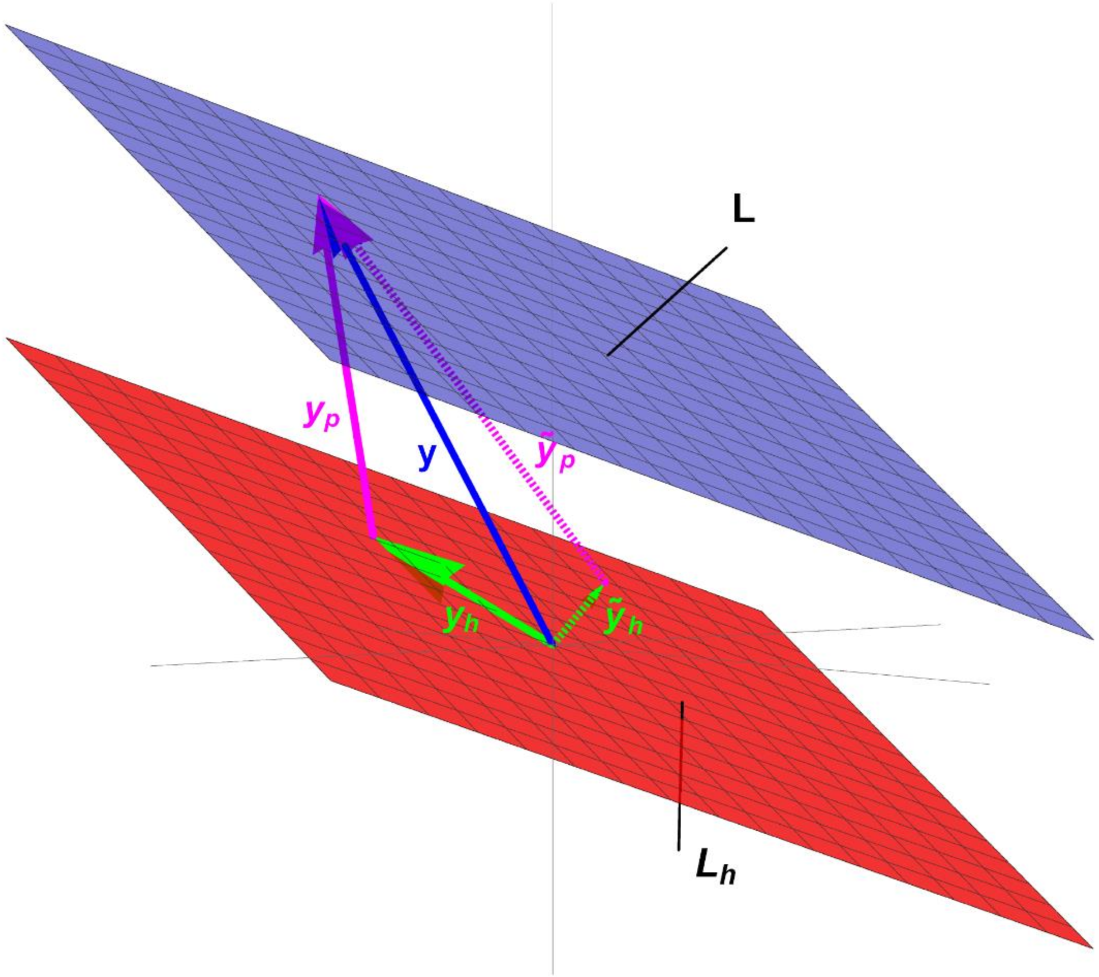
Wie bei den linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung erhält man die allgemeine Lösung $y(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung indem Man zur homogenen Lösung $y_h(x)$ eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ addiert:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)\,.$$

Die Menge L aller Lösungen der inh. DGL hat also die Form

$$L = L_h + y_p$$

Dies entspricht daher einer um y_p „geometrisch parallel verschobenen" Ebene



Symbolische Darstellung der Lösungsmenge L der inhomogenen Differentialgleichung 2. 0.

„Aufsuchen einer partikulären Lösung y_p“.

Ansatz: (Kochrezept!) Wir nehmen an, es gibt eine Lösung y_p der DGL mit der „allgemeinen Form vom Typ der Inhomogenität $g(x)$“.

$$y_p(x) \underset{vom\ gleichen\ Typ}{\approx} g(x)$$

Dann ergibt sich die allgemeine Lösung der inh. DGL mit **:**

$$y = y_h + y_p$$

Was bedeutet vom gleichen Typ? Hier eine Tabelle:

Inhomogenität	**Ansatz**
$g(x)$	$y_p(x)$
sin(ωx)	A cos(ωx) + B sin(ωx)
sin(ωx)	A sin $(\omega x + \varphi)$
$\cos(\omega \mathrm{x})$	A cos(ωx) + B sin(ωx)
x^n	$a_0 + a_1 x + a_2\, x^2 + .. + a_n x^n$
$e^{\alpha x}$	$a\, e^{\alpha x}$

Die unbekannten Konstanten A, B,φ, a_0 , a_1 … usw., müssen durch Einsetzen in die DGL berechnet werden.

Beispiel 13.17:

$$y''(x) + 2\,y'(x) + 5\,y(x) = 2\,e^{-3x}$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$(AB)_1: \;\; y(0) = 1$$
$$(AB)_2: \;\; y'(0) = 0.$$

Wir haben 4 Schritte:

1.Schritt: Lösung der (zugehörigen) homogenen Differentialgleichung

$$y''(x) + 2\,y'(x) + 5\,y(x) = 0$$

Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ führt zur CGL:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

mit den konjugiert komplexen Lösungen:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2j\ .$$

Da D = - 4 < 0 haben wir den Schwingfall, mit $\alpha = 1$ und $\omega = 2$.

Somit ist

$$\{y_1(x) = e^{-x}\cos(2x)\ , \qquad y_2(x) = e^{-x}\sin(2x)\}$$

ein **reelles** Fundamentalsystem der homogenen DGL.

Und wir haben die allgemeine **(reellwertige) homogene Lösung** der Differentialgleichung der homogenen DGL (Schwingfall):

$$y_h(x) = c_1 e^{-x}\cos(2x) + c_2 e^{-x}\sin(2x), \quad \text{für } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

2. Schritt Bestimmung einer partikulären Lösung $y_p(x)$ der inh DGL.:
Wegen $g(x) = 2\,e^{-3x}$ machen wir den **Ansatz** (s. Tabelle**):**

$$y_p(x) = c\,e^{-3x}.$$

Gesucht ist $c \in \mathbb{R}$, so dass $y_p(x) = c\, e^{-3x}$ Lösung der inh. DGL ist.

Wir setzen dies ein in die inh. DGL

$$9c\, e^{-3x} - 6\, c\, e^{-3x} + 5c\, e^{-3x} = 2\, e^{-3x}.$$

Dividieren durch e^{-3x} ergibt

$$9c - 6c + 5c = 2\,.$$

Daraus folgt: $c = \frac{1}{4}$, also ist

$$y_p(x) = \frac{1}{4}\, e^{-3x}.$$

3. Schritt: Bestimmung der allgemeinen Lösung y(x) der inh. DGL

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$= e^{-x}(c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)) + \frac{1}{4}\, e^{-3x}\,, \qquad \text{für } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

4. Schritt: Bestimmung der Konstanten c_1, c_2 aus den Anfangsbedingungen:

$$(AB)_1\colon\ y(0) = 1$$

$$(AB)_2\colon\ y'(0) = 0$$

Es gilt mit $(AB)_1$

$$y(0) = e^0(c_1\cos(0) + c_2\sin(0)) + \frac{1}{4}\,e^0 = c_1 + \frac{1}{4} \overset{(AB)_1}{=} 1 \quad \Longrightarrow$$

$$c_1 = \frac{3}{4}$$

und

$$y' = -e^{-x}(c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)) + 2e^{-x}(-c_1\sin(2x) + c_2\cos(2x)) - \frac{3}{4}\,e^{-3x}$$

$\Longrightarrow$

$$y'(0) = -(c_1\cos(0) + c_2\sin(0)) + 2(-c_1\sin(0) + c_2\cos(0)) - \frac{3}{4}.$$

Und mit $(AB)_2$ $\qquad y'(0)=0 \qquad \Longrightarrow$

$$-c_1 + 2c_2 - \frac{3}{4} \overset{(AB)_2}{=} 0$$

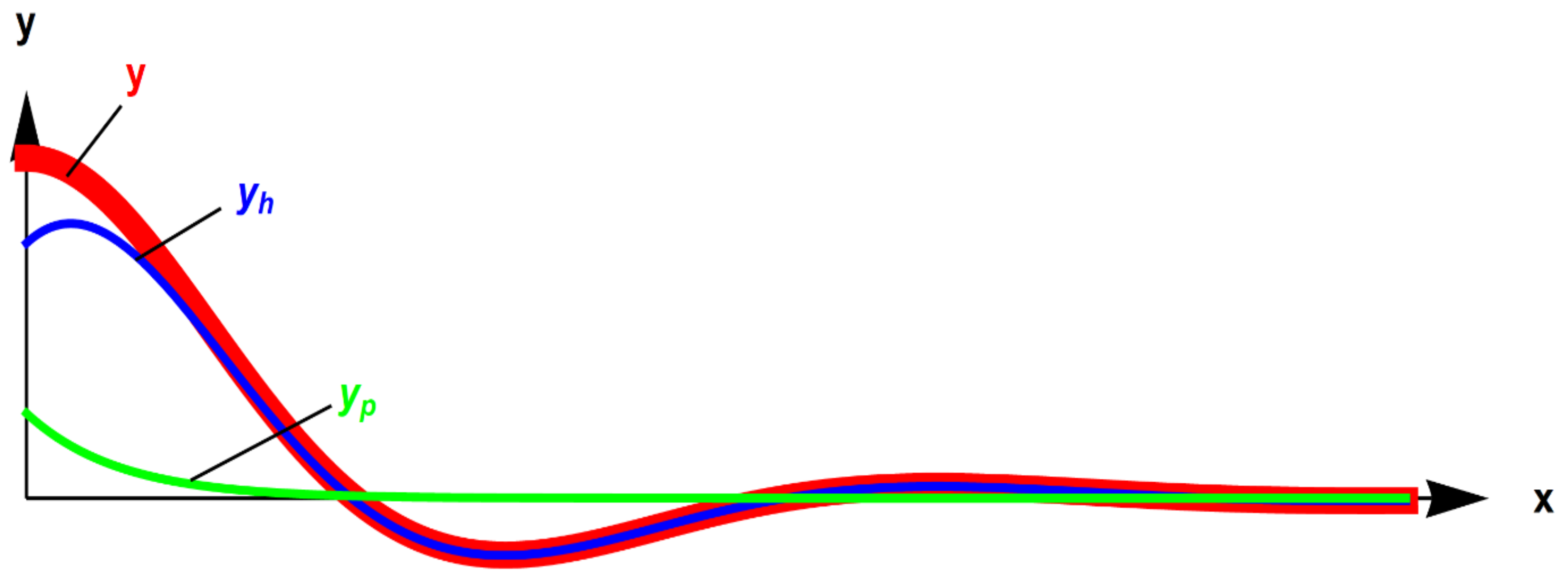
Damit ist

$$2c_2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad c_2 = \frac{3}{4}\,,$$

also haben wir die Lösung des AWP mit $c_1 = c_2 = \frac{3}{4}$ (s. Abb.) :

$$y(x) = \frac{3}{4} e^{-x} (\cos(2x) + \sin(2x)) + \frac{1}{4}\, e^{-3x}\,.$$

$$y(x) = \frac{3}{4} e^{-x}(\cos(2x) + \sin(2x)) + \frac{1}{4}\, e^{-3x}\,.$$



Lösung der DGL $\mathbf{y''(x) + 2\, y'(x) + 5\, y(x) = 2\, e^{-3x}}$ (Schwingfall inhomogen)