Das Chaos in der Kuckucksuhr

Betrachtungen zum Deterministisches Chaos

H. L. Cycon, FB1 FHTW Berlin

Chaos ist ein vielschichtiger Begriff der von der antiken Philosophie bis in unseren täglichen Sprachgebrauch reicht. Eine naturwissenschaftliche Facette dieses Themas ist das sogenannte Deterministische Chaos. An einfachen Beispielen wie einem ebenen nichtlinearen Pendel, wie es in jeder Wanduhr vorkommt und dem Lorenzsystem. d.h. ein Modell für das Wetter, kann man sehen wie Chaos entsteht und was daran deterministisch ist.

Determinismus bedeutet: wenn man hinreichende Kenntnis zu einem Zeitpunkt hat, kann man alles was geschehen wird, vorausberechnen. Das Paradebeispiel für deterministische Abläufe ist die Himmelsmechanik. Man kann die Bewegungen im Sonnensystem "astronomisch" genau für Jahrtausende vorausberechnen. Dies führt zum ***Prinzip der Reproduzierbarkeit*** d.h.: **gleiche Ursachen haben gleiche Wirkungen**. Denn, wenn jede Ursache eine Wirkung hat (Kausalität) und alles eindeutig berechenbar ist, dann führt eine gleiche Ausgangslage zum gleichen Ergebnis. Das Problem dabei ist nur, dass es genau genommen niemals gleiche Ursachen gibt, weil die Zeit unumkehrbar fortschreitet und zweitens ist es praktisch fast unmöglich in zwei Versuchen exakt die gleiche Ausgangslage zu schaffen. Deshalb beschränkt man sich auf die Erkenntnis

Ähnliche Ursachen haben ähnliche Wirkungen. Das bedeutet kleine Nebenfaktoren dürfen vernachlässigt werden, ohne dass etwas wesentliches passiert. Dies ist so etwas wie eine Aussage über die "Stabilität" der Systeme. Aber sie ist leider nicht allgemein gültig. Dafür gibt es zwei Gründe :

Einerseits ist der Ansatz des totalen Determinismus zumindest in der Mikrophysik durch die Quantenmechanik (Schrödingers Unschärferelation) aufgehoben. Andererseits gibt es in unserer gewöhnlichen Umwelt Systeme, die dem krass widersprechen. Es sind Systeme, wo geringfügige Änderungen der Anfangswerte am Eingang dramatische Veränderungen am Ausgang oder sogar völlig irreguläres (chaotisches) Verhalten hervorrufen. Solche Systeme werden untersucht in der sogenannten nichtlinearen Dynamik. Dieses chaotische Verhalten sollte aber nicht verwechselt werden mit rein zufälligen Abläufen. Wenn man z.B. eine Münze mehrmals wirft, hat das Ergebnis des 1. Wurfs keinen Einfluss auf die nachfolgenden Würfe. Das ist hier nicht so. Jede Bewegung, wenn auch noch so chaotisch, ergibt sich direkt aus der jeweiligen Vorgeschichte. Erstaunlich ist an diesen Systemen zudem, dass trotz der chaotischen Reaktionen, hinter diesem Chaos eine Struktur steckt, die selbst ungemein stabil ist (ein "seltsamer Attraktor"). Man nennt dies Verhalten deshalb auch ***deterministisches Chaos***.

Das Pendel

Dies Beispiel ist eigentlich das Problem eines Uhrmachers. Wir betrachten das Pendel einer (Pendel-) Uhr. Die Auslenkung von der Ruhelage während des Zeitablaufs ist die gesuchte Größe. Man kann das System beschreiben durch eine mathematische Gleichung, genauer durch eine nichtlineare Schwingungsgleichung deren Lösung die Auslenkung ist.

Die bestimmenden Systemparameter sind die Winkelgeschwindigkeit, die (Eigen-) Frequenz des Systems, wenn es frei schwingen würde bei kleinen Ausschlägen und die Dämpfung die Reibungsverluste beschreibt. Dazu kommt noch die äußere Erregung des Pendels wenn es von außen angestoßen wird. Sie bestimmen im wesentlichen das Verhalten des Systems. Der Zustand des Systems zu jeden Zeitpunkt ist bekannt, wenn man Ort und Geschwindigkeit der Auslenkung zu jedem Zeitpunkt kennt. Wenn man diese beiden Größen in einem Koordinatensystem aufträgt, erhält man den sogenannten Phasenraum. Die zeitliche Entwicklung des Systems ist dann eine Bewegung in diesem Phasenraum. Diese wird Phasenbahn oder Orbit genannt.

Wichtig sind noch die Winkel- und Geschwindigkeitswerte mit denen das System startet d.h. die Anfangsbedingungen:

Anfangsauslenkung (Ort) zum Startzeitpunkt

Anfangs(winkel)geschwindigkeit zum Startzeitpunkt

Wenn man Reibungsverluste berücksichtigt und keinen äußeren Antrieb hat, schwingt das System mit einer abklingenden Sinusschwingung (Abb.1a)), d.h. es kommt nach einiger Zeit zur Ruhe. Die Phasenbahn "spiralt" auf einen Fixpunkt zu. Dieser Punkt ist ein sogenannter ***Attraktor***, d.h. alle Zustände in der "Nähe" des Punktes werden darauf zulaufen, denn gleichgültig von wo man startet, das System kommt irgendwann einmal zur Ruhe.

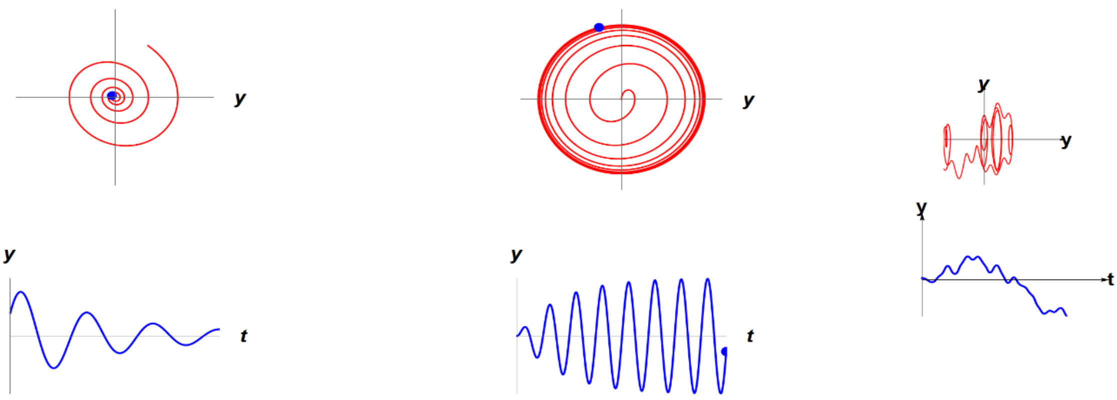

Abb.1 a) **b)** **c)**

Wenn man das System einer schwingenden Störung anregt, schwingt es nach einer Einschwingphase in einem stabilen Grenzzyklus. Dies ist eine geschlossene Phasenbahn (Abb. 1 b). Auch das ist ein Attraktor, d.h. aus verschiedenen Anfangszuständen heraus läuft das System schließlich immer auf denselben Grenzzyklus und verlässt ihn nicht mehr.

Betrachten wir das System in einem solch eingeschwungenen Zustand im Phasenraum. Wenn wir jetzt die Erregerfrequenz ändern, nimmt die Amplitude zuerst leicht zu und plötzlich treten wilde Bewegungen auf. Das hat damit zu tun, dass das Pendel zum Überschlagspunkt kommt und dort instabil ist, d.h. durch die geringste Störung links oder rechts herunterfällt.

Die zeitliche Entwicklung für diesen Fall ist in Abb.1c) aufgezeichnet. Das Pendel macht "chaotische" Bewegungen, es ist in einem chaotischen Zustand.

Wenn man nun in diesem chaotischen Zustand die Anfangswerte nur minimal verändert, springt der (Winkel-) Endwert zu extremen Ausschlägen. Das System ist extrem empfindlich bezüglich Änderungen der Anfangslage. **Kleine Fehler haben katastrophale Wirkung**!

Mit einem solchen System sollte man also keinen Airbus steuern.

Die Bewegung erscheint also völlig unsystematisch und wegen der immer vorhandenen Ungenauigkeit der Anfangsbedingungen unberechenbar. Der weitere Verlauf der Phasenbahn scheint dann eine ganze Fläche auszufüllen. Etwas Struktur erkennt man mit einem "Trick" der auf Poincaré zurückgeht: wir "wickeln" die Zeitachse um einen Zylinder , "schneiden" dann den Zylinder auf und betrachten die Durchstoßpunkte durch die Schnittfläche. Dies ist der sogenannte Poincaré-Schnitt. Wir stellen dabei fest, dass die Durchstoßpunkte der Bahnkurve nicht, wie man vermuten könnte, die ganze Schnittfläche füllen, sondern nur an bestimmten Stellen auftreten und damit eine deutliche Struktur bilden. Dies erinnert nicht ohne Grund an die Schokoladenspur in einem Marmorkuchen (Abb.2).

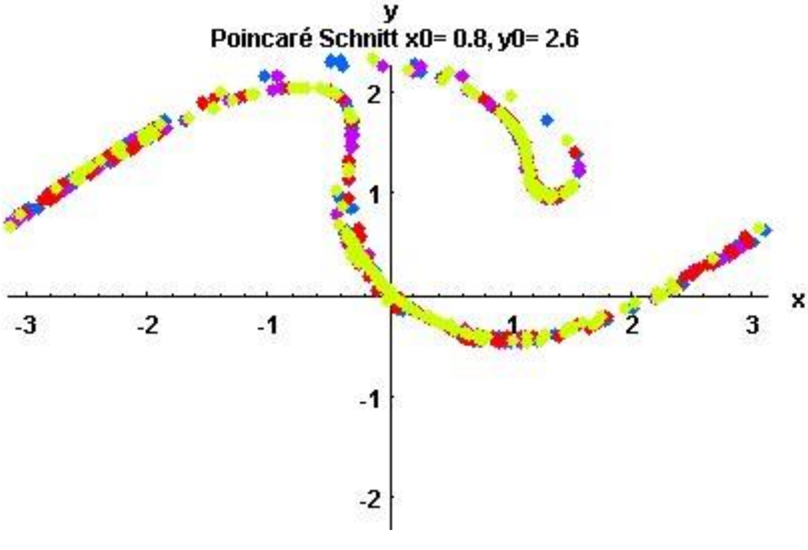

Abb. 2

Diese Struktur ist im Gegensatz zur eigentlichen Phasenbahn erstaunlich stabil bezüglich Veränderungen der Anfangswerte, d.h. wenn man die Anfangsgeschwindigkeit ändert, verändert sich zwar die Lage der Durchstoßpunkte, aber sie bleiben immer innerhalb der Struktur. Man hat einen "***seltsamen***" ***Attraktor*** (genauer dessen Poincaré-Schnitt). Also trotz der extrem starken Abhängigkeit der Phasenbahn von den Anfangsbedingungen (diese entsprechen den verschiedenen Färbungen in Abb.2) bleibt der Attraktor stabil. Dies ist ein typisches Kennzeichen für deterministische chaotische Systeme.

Der Lorenzattraktor

Ein chaotisches System, das uns alle bewegt, ist das Wetter. Ein System wie die Atmosphäre vollkommen bestimmen zu wollen ist hoffnungslos. Das wusste natürlich auch Edward Lorenz. Er versuchte in den 50er Jahren aus den komplizierten Abläufen die "wesentlichen" Teile herauszufiltern, d.h. das reale Klima auf ein Modellklima abzubilden, an dem man das Verhalten genau studieren kann, um dann Rückschlüsse auf das reale Geschehen zu ziehen. Lorenz schlug in seiner mittlerweile berühmten Arbeit vor, das System auf ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen X, Y und Z zu reduzieren. Man hat dann einen 3-dimensionalen Phasenraum. Physikalisch beschreibt das Gleichungssystem eine inkompressible viskose Flüssigkeit, die unten erwärmt und oben gekühlt wird, so dass Konvektion und schließlich Turbulenz entsteht. Die drei Variablen X, Y und Z beschreiben den Zustand des Systems. Es sind abstrakte thermo-bzw. hydrodynamische Größen:

Dieses System hat Lorenz numerisch d.h. mit Hilfe eines Computers untersucht. Er stellte dabei fest, dass nach genügend langer Laufzeit, genau wie beim Pendel, eine extreme Sensibilität bezüglich Änderungen der Startwerte auftrat. Eine winzige Störung der Anfangsbedingungen am Eingang hatte extreme, vielleicht katastrophale Änderungen am Ausgang der Systems zur Folge (s. Abb.3). In diesem Zusammenhang entstand die Metapher vom "Schmetterlingseffekt" d.h Lorenz schrieb 1979 einen Artikel mit dem Titel: "Vorhersagbarkeit: verursacht der Schlag eines Schmetterlingsflügels in Brasilien einen Tornado in Texas?" .

Lorenz entdeckte in seinem Miniwettermodell den heute berühmten ***Lorenzattraktor***, das ist der Orbit im Phasenraum des Systems bei einer bestimmten Konstellation der Systemparameter Wenn wir die Parameter variieren ergeben sich auffallend voneinander sehr verschiedene Endzustände: bei bestimmten Parameterwerten läuft das System auf einen Fixpunkt zu; d.h. es tritt schließlich keine Bewegung mehr auf, das System bleibt stehen. Bei anderen Werten hat das System einen Grenzzyklus, d.h. man hat Konvektion aber keine

Turbulenzen während für einen dritten Wert abermals einen Fixpunkt auftritt es bildet sich dann der bekannte Lorenzattraktor

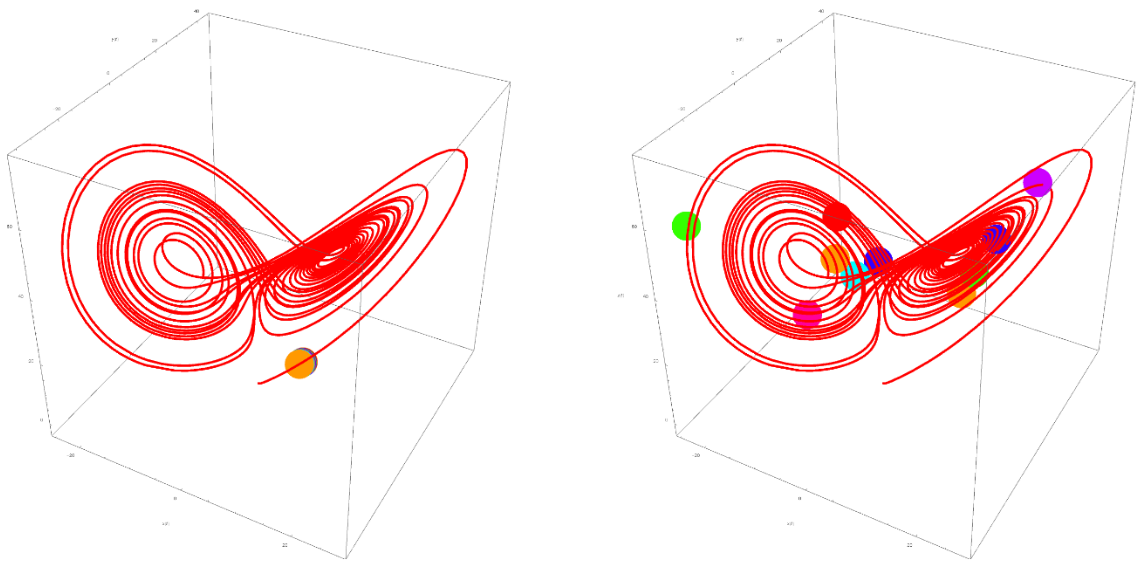

Abb.3

Er sieht aus wie ein aufgeklapptes Wollknäuel. Die Übergänge zwischen linkem und rechtem Zentrum jedoch sind nicht periodisch, d.h. nicht nach einem erkennbaren Schema "gestrickt".

Wenn wir verschiedene Anfangsbedingungen wählen, die sehr dicht beisammen liegen, hat man schließlich doch völlig unabhängige Phasenbahnentwicklungen. Das heißt geringfügig abweichende Daten am Anfang führen zu völlig verschiedenen Ergebnissen. Interessant dabei ist, dass die Zustände aber immer im Bereich des Lorenzattraktors bleiben. Auch sehr verschiedene Anfangszustände laufen immer in den Attraktor. Dies demonstriert sehr deutlich die Strukturstabilität: Die einzelnen Phasenbahnen unterscheiden sich deutlich voneinander aber schließlich "enden" sie alle wenn auch zu verschiedenen Zeiten im Lorenzattraktor. Dies war einer der ersten Attraktoren die bekannt wurden und ist heute der am weitesten untersuchte "seltsame" Attraktor.