6 Differentialrechnung

In diesem Kapitel wird der Begriff der Ableitung einer Funktion eingeführt. Ein typisches Beispiel für eine Ableitung in der Physik ist die Geschwindigkeit bei der Beschreibung von Bewegungen. Geometrisch kann man die Ableitung als die Steigung der Tangente einer Kurve interpretieren. Die Mathematik, die sich mit Ableitungen beschäftigt, heißt Differentialrechnung. Sie beruht wesentlich auf dem Konzept von Grenzwerten.

Bestimmte “glatte“ Funktionen kann man mehrfach ableiten. Dabei entstehen höhere Ableitungen. Diese spielen eine wichtige Rolle bei der Kurvendiskussion von Funktionen.

6.1 Ableitung einer Funktion

Wenn man eine Funktion $f(x)$ betrachtet, die an einem Punkt P eine Tangente hat, dann kann man die Steigung der Tangente im Punkt P bestimmen durch Grenzwertbildung der Steigungen von Sekanten. Dies führt zum Begriff des **Differentialquotienten** (s. Abb. 6.1).

.

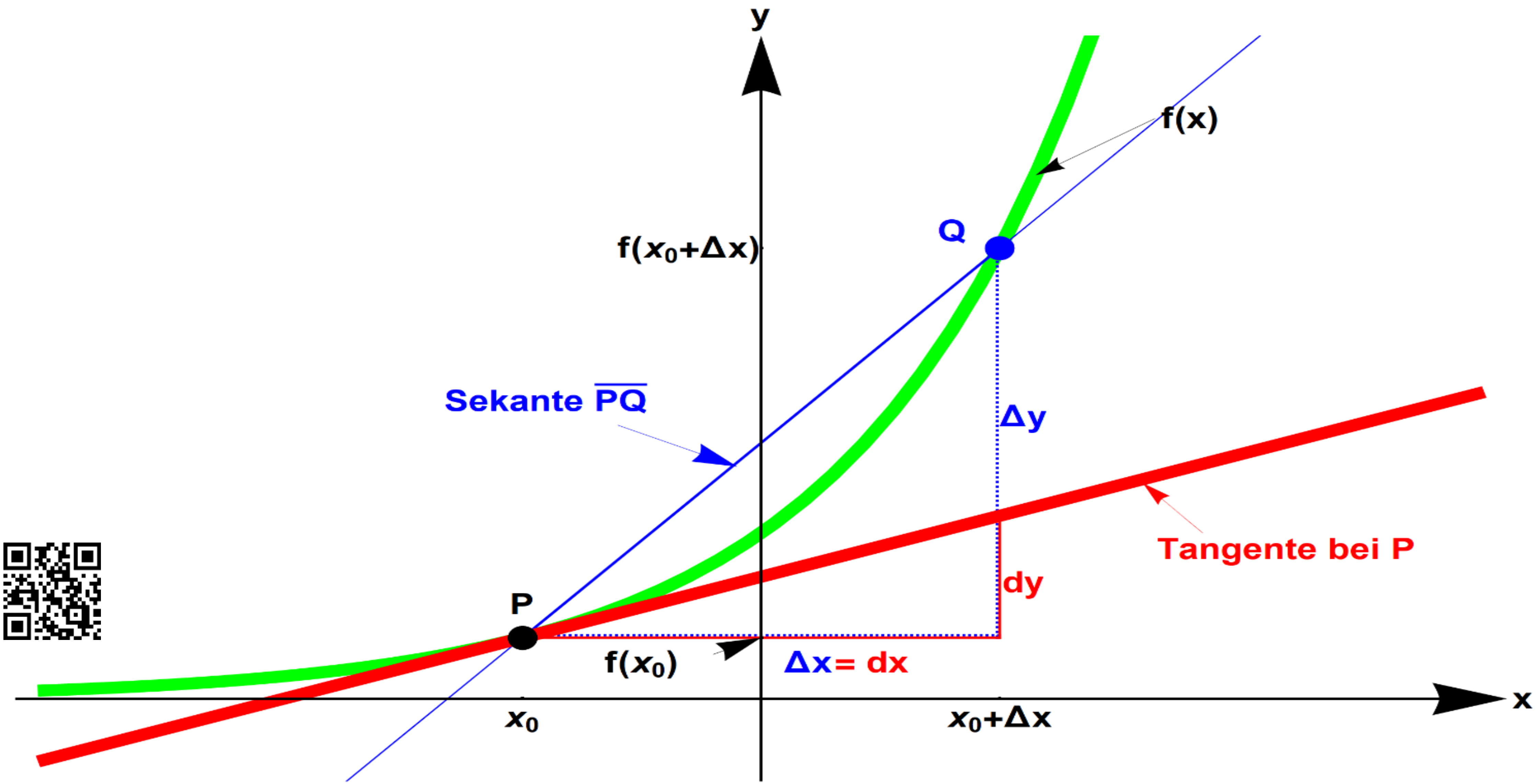


Abb. 6.1. Sekante und Tangente bei P. Das Video LINK zeigt, wie eine Sekante in die Tangente von $f(x)$ an der Stelle P übergeht.

https://sn.pub/MV0aVK

Die Steigung der Sekante PQ ist gleich dem Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Wenn Δx kleiner wird, nähert sich der Punkt Q auf der Kurve f(x) dem Punkt P und die Sekante nähert sich der Tangente bei P.

Im Grenzfall $\Delta x \to 0$ wird die Sekante zur Tangente, der Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wird zum **Differentialquotienten** $\frac{dy}{dx}$ und dies ist die Steigung der Tangente im Punkt P

Die Steigung der Sekante PQ ist gleich dem Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Wenn Δx kleiner wird, nähert sich der Punkt Q auf der Kurve f(x) dem Punkt P und die Sekante nähert sich der Tangente bei P.

Im Grenzfall $\Delta x \to 0$ wird die Sekante zur Tangente, der Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wird zum **Differentialquotienten** $\frac{dy}{dx}$ und dies ist die Steigung der Tangente im Punkt P. Damit definieren wir

Definition 6.1:

$$\frac{dy}{dx} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Bemerkung 6.1:

(1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{/x_0}$ heißt auch ***Ableitung von f an der Stelle*** x_0 , der Vorgang heißt ***ableiten*.**

Bemerkung 6.1:

(1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{/x_0}$ heißt auch ***Ableitung von f an der Stelle*** x_0 , der Vorgang heißt ***ableiten*.**

(2) Der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ ist **kein** Quotient, sondern der Grenzwert des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$!

Bemerkung 6.1:

(1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{/x_0}$ heißt auch ***Ableitung von f an der Stelle*** x_0 , der Vorgang heißt ***ableiten*.**

(2) Der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ ist **kein** Quotient, sondern der Grenzwert des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$!

(3) Der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ existiert nicht immer!

Bemerkung 6.1:

(1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{/x_0}$ heißt auch ***Ableitung von f an der Stelle*** x_0 , der Vorgang heißt ***ableiten*.**

(2) Der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ ist **kein** Quotient, sondern der Grenzwert des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$!

(3) Der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ existiert nicht immer!

(4) Wenn $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{/x_0}$ existiert, dann heißt f differenzierbar ***(ableitbar) an der Stelle*** x_0.

Bemerkung 6.1:

(1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{/x_0}$ heißt auch ***Ableitung von f an der Stelle*** x_0 , der Vorgang heißt ***ableiten*.**

(2) Der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ ist **kein** Quotient, sondern der Grenzwert des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$!

(3) Der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ existiert nicht immer!

(4) Wenn $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{/x_0}$ existiert, dann heißt f differenzierbar ***(ableitbar) an der Stelle*** x_0.

(5) f heißt ***differenzierbar***, wenn f für alle $x \in D_f$ differenzierbar ist.

Wir haben dann folgende **Schreibweisen:**

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{/x_0} = y'(x_0) = f'(x_0) = \left(\frac{df}{dx}\right)_{/x_0} = \frac{d}{dx}f(x_0)$$

Wir haben dann folgende **Schreibweisen:**

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{/x_0} = y'(x_0) = f'(x_0) = \left(\frac{df}{dx}\right)_{/x_0} = \frac{d}{dx}f(x_0)$$

Es gelten die **Ableitungsregeln:**

(6.2) **Linearität** $\quad (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

für $\alpha, \beta\ x \in \mathbb{R}$

Wir haben dann folgende **Schreibweisen:**

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{/x_0} = y'(x_0) = f'(x_0) = \left(\frac{df}{dx}\right)_{/x_0} = \frac{d}{dx} f(x_0)$$

Es gelten die **Ableitungsregeln:**

(6.2) **Linearität** $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

für $\alpha, \beta\ x \in \mathbb{R}$

(6.3) **Produktregel** $(fg)' = f'g + fg'$

(6.4) **Quotientenregel** $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

(6.4) **Quotientenregel** $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

(6.5) **Kettenregel** $$\big(F(g)\big)' = F'(g) \cdot g'$$

(6.4) **Quotientenregel** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

(6.5) **Kettenregel** $\left(F(g)\right)' = F'(g) \cdot g'$

(6.6) **Logarithmische Ableitung**

$$(f^g)' = (f^g) \cdot \left(g' \ln(f) + g\,\frac{f'}{f}\right), \ \text{f} > 0$$

(6.4) **Quotientenregel** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

(6.5) **Kettenregel** $\big(F(g)\big)' = F'(g) \cdot g'$

(6.6) **Logarithmische Ableitung**

$$(f^g)' = (f^g) \cdot \left(g' \ln(f) + g\,\frac{f'}{f}\right),\ \text{f} > 0$$

(6.7) **Ableitung der Umkehrfunktion** $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$

Begründung Produktregel:

$$\frac{\Delta(f.g)}{\Delta x} = \frac{(f(x+\Delta x)(g(x+\Delta x)-(f(x)(g(x)}{\Delta x} =$$

Begründung Produktregel:

$$\frac{\Delta(f.g)}{\Delta x} = \frac{(f(x+\Delta x)(g(x+\Delta x)-(f(x)(g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{((f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-(f(x)(g(x+\Delta x)+(f(x)(g(x+\Delta x)-(f(x)(g(x)}{\Delta x}$$

Begründung Produktregel:

$$\frac{\Delta(f.g)}{\Delta x} = \frac{(f(x+\Delta x)(g(x+\Delta x)-(f(x)(g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{((f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)\color{red}{-(f(x)(g(x+\Delta x)+(f(x)(g(x+\Delta x)}-(f(x)(g(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{((f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-(f(x)(g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{(f(x)(g(x+\Delta x)-(f(x)(g(x)}{\Delta x}$$

Und somit

$$\frac{d(f.g)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big((f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)\big)}{\Delta x}$$

Und somit

$$\frac{d(f.g)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left((f(x+\Delta x)g(x+\Delta x))\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x)-(f(x))(g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x)(g(x+\Delta x)-(g(x))}{\Delta x} =$$

Und somit

$$\frac{d(f.g)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big((f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)\big)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x)-(f(x))(g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x)(g(x+\Delta x)-(g(x))}{\Delta x} =$$

$$= f'\,(x)g(x) \; + f(x)g'(x)$$

Begründung(Logarithmische Ableitung)

$$y(x) = f(x)^{g(x)}$$

Begründung(Logarithmische Ableitung)

$$\mathrm{y}(x) = f(x)^{\mathrm{g}(x)} = e^{\ln\left(f(x)^{\mathrm{g}(x)}\right)}$$

Begründung(Logarithmische Ableitung)

$$\mathrm{y}(x) = f(x)^{\mathrm{g}(x)} = e^{\ln(f(x)^{\mathrm{g}(x)})} = e^{\mathrm{g}(x)\ln(f(x))}$$

Begründung(Logarithmische Ableitung)

$y(x) = f(x)^{g(x)} = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x)\ln(f(x))}$

dann ist mit Kettenregel:

$y'(x) = e^{g(x)\ln(f(x))}\left(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$

Beispiel 10: (Logarithmische Ableitung)

$y(x) = x^{\sin(x)} = e^{\ln(x^{\sin(x)})} = e^{\sin(x)\ln(x)}$

Dann ist

$y'(x) = e^{\sin(x)\ln(x)}(\cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x})$

Begründung Kettenregel (für Schachtelfunktionen):

$$\frac{d(F(g(x)))}{dx} \overbrace{\triangleq}^{formal} \frac{d(F(g))}{dg}\,\frac{dg}{dx} = F'(g)\; g'(x)$$

Begründung der Formel (Ableitung der Umkehrfunktion):

Gegeben ist $y = f(x)$ und $y' = \ f'(x)$, gesucht ist $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

Begründung der Formel (Ableitung der Umkehrfunktion):

Gegeben ist $y = f(x)$ und $y' = \ f'(x)$, gesucht ist $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

Es gilt die Identität:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

Begründung der Formel (Ableitung der Umkehrfunktion):
Gegeben ist $y = f(x)$ und $y' = \ f'(x)$, gesucht ist $\left(f^{-1}\right)'(x)$.
Es gilt die Identität:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

Ableitung mit der Kettenregel folgt:

$$\left(f\left(f^{-1}\right)\right)'(x) = f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \left(f^{-1}(x)\right)' = (x)' = 1$$

Begründung der Formel (Ableitung der Umkehrfunktion):
Gegeben ist $y = f(x)$ und $y' = f'(x)$, gesucht ist $\left(f^{-1}\right)'(x)$.
Es gilt die Identität:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

Mit der Kettenregel folgt:

$$\left(f\left(f^{-1}\right)\right)'(x) = f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \left(f^{-1}(x)\right)' = (x)' = 1$$

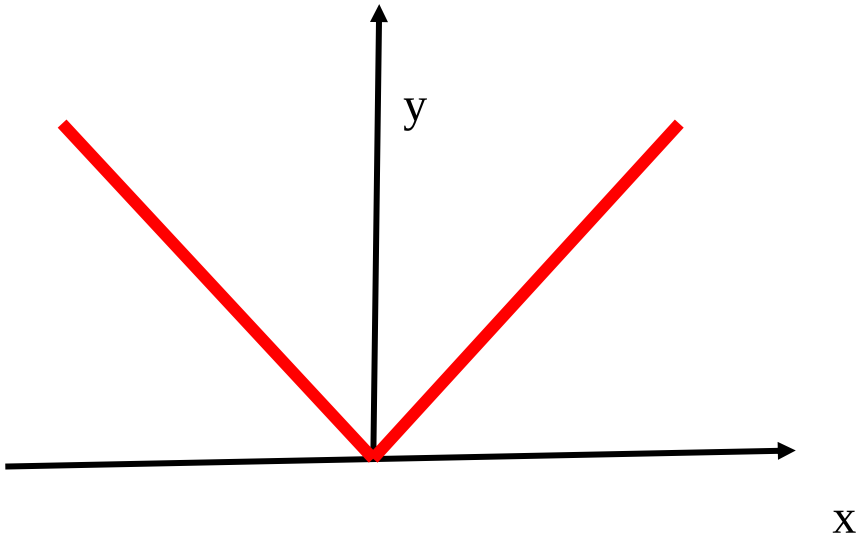
Somit haben wir (6.7):

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Beispiel 1:

Sei

$$y(x) = |x| =: \begin{cases} x \;\; für\; x > 0 \\ -x \;\; für\; x < 0 \end{cases}$$



Dann ist der linksseitige Grenzwert

$$g_L = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$$

Und der rechtsseitige Grenzwert

$$g_R = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

Also gilt $g_L \neq g_R$

Also existiert der Grenzwert **nicht** und f ist **nicht differenzierbar**!

Beispiel 2:

Sei

y(x) = x

Dann ist

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Beispiel 2:

Sei

y$(x) = x$

Dann ist

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Beispiel 3:

Sei

y$(x) = x^2$

Dann ist

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x$$

Einschub: Binomische Formel: Pascalsches Dreieck:

$(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

.

.

$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots$

$\ldots + \binom{n}{n-1}\,a\,b^{n-1} + \binom{n}{n}\,b^n$

1		
1 2 1		n=2
1 3 3 1		n=3
1 4 6 4 1		n=4
1 5 10 10 5 1		n=5

Mit dem ***Binominalkoeffizient*** $\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!\ k!}$, und $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Beispiel 4: $y(x) = x^n$

Dann ist (siehe Einschub Binomische Formel):

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x)^n + n\Delta x(x)^{n-1} + (\Delta x)^2(Restpolynom) - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{n(\Delta x)\, x^{n-1}}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2(Restpolynom)}{\Delta x} =$$

$$= n\, x^{n-1} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x\,(\,Restpolynom)}_{=0}$$

$$= n\, x^{n-1}$$

Einschub: Anwendung AdditionsTheorem

Setze $\alpha = \frac{x+y}{2}$ und $\beta = \frac{x-y}{2}$ dann ist

$\alpha + \beta = x$ und $\alpha - \beta = y$

Mit dem Additionstheorem gilt:

$\sin(x) = \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

-$\sin(y) = \sin(\alpha - \beta) = -\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

Damit ist

$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos(\alpha)\sin(\beta) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

also

$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

s.Einschub: Anwendung Additionstheorem:

$$\sin x \ - \sin y = \ 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Beispiel 5: y(x) =sin x

Dann ist mit Einschub Additionstheorem:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta\, x)-\sin x}{\Delta x} = 2\,\frac{1}{\Delta x}\cos\ \left(\frac{x+\Delta x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+\Delta x-x}{2}\right)$$

$$= \cos\ \left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \quad \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}}_{\to 1 f\text{ür} \Delta x \to 0} \quad \to \cos\ (x) \quad \text{für } \Delta x \to 0$$

also ist

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos(x)$$

Beispiel 6:

$y(x) = x^2 + \sin(x) \cos(x)$

Dann ist

$y'(x) = 2x + (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2$

Beispiel 7:

$y(x) = 3\sin(5x)$

Dann ist

$y'(x) = 3 \cos(5x)\, 5 = 15 \cos(5x)$

Beispiel 8:

$y(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Dann ist (Quotientenregel)

$y'(x) = \tan(x)' = \frac{\cos(x)\cos(x)-(-)\sin(x)\sin(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2+\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$

Beispiel 9: (Logarithmische Ableitung)

$y(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\ln(x)} \quad , x>0$

Dann ist

$y'(x) = e^{x\ln(x)}(\ln(x)+\frac{x}{x}) = e^{x\ln(x)}(\ln(x)+1)$

Beispiel 10: (Logarithmische Ableitung)

$y(x) = x^{\sin(x)} = e^{\ln(x^{\sin(x)})} = e^{\sin(x)\ln(x)}$

Dann ist

$y'(x) = e^{\sin(x)\ln(x)}(\cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x})$

Beispiel 11: Logarithmische Ableitung (s. Abb.6.2)

Sei $y(x) = (\sin x)^x,\ x \in (0, \pi)$. Es gilt dann:

$$y(x) = e^{xln(\sin x)}$$

Mit der Kettenregel und der Produktregel ist die Ableitung:

$$y'(x) = e^{xln(\sin x)}\left(\ln(\sin x) + \frac{x \cos x}{\sin x}\right), \qquad x \in (0, \pi)$$

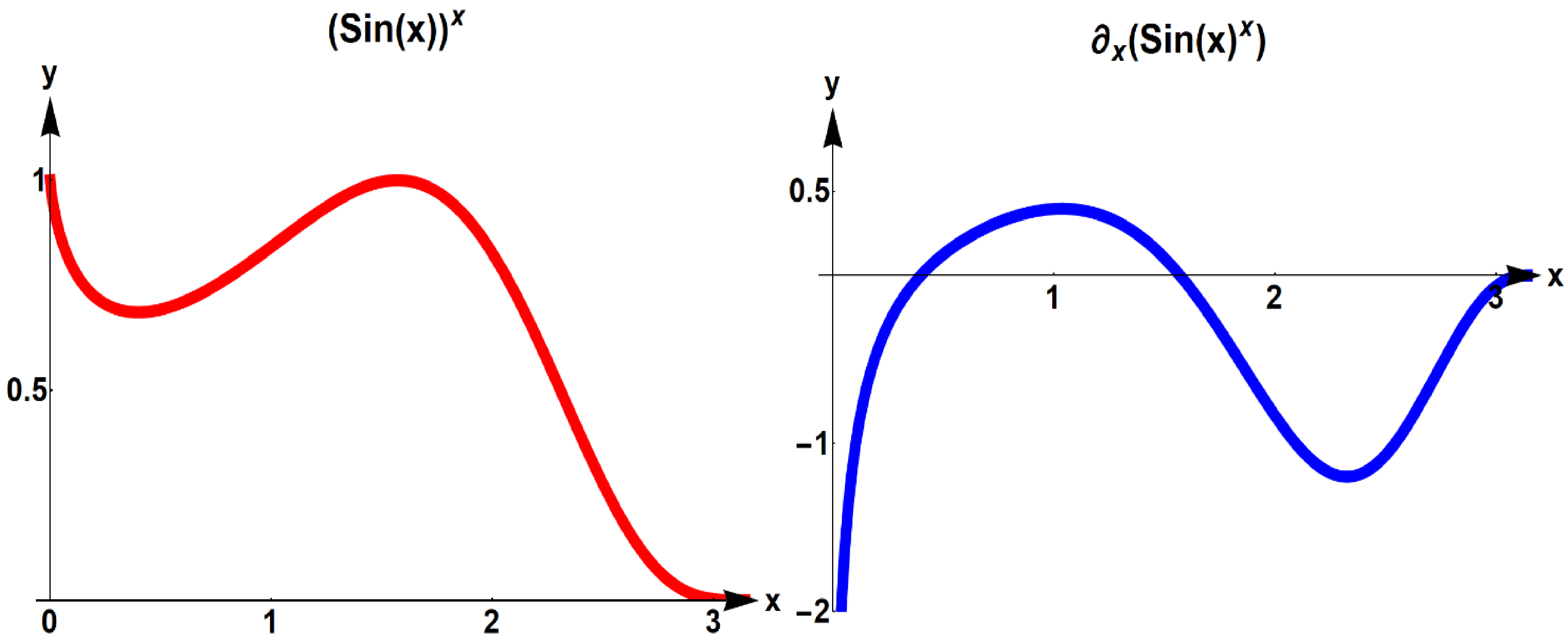


Abb. 6.2. Funktion $(\sin x)^x$ und ihre Ableitung $((\sin x)^x)'$

Beispiel 12: Ableitung der Umkehrfunktion

Gesucht ist die Ableitung von $\arcsin(x)$.

Betrachte

$$f(x) = y(x) = \sin x\,,$$

dann ist

$$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

und

$$f'(x) = y'(x) = \cos x\,.$$

Mit (der Formel Ableitung der Umkehrfunktion) folgt:

$$\arcsin(x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Also haben wir:

$$\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Tabelle der Ableitungen von Grundfunktionen

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f'(x)}$
x^n	nx^{n-1}
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x \rvert < 1$

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f'}(x)$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2(x)}$
$\operatorname{artanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}, \lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{arcoth}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}, \lvert x\rvert > 1$