Differentialrechnung im Mehrdimensionalen

1. Teil

Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Definitionen

Eine Abbildung

$f\colon \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{D}_f \subset \mathbb{R}^n$,

$f\colon \quad (x_1, x_2, x_3,\ldots,x_n) \to f(x_1, x_2, x_3,\ldots,x_n)$ für $(x_1, x_2, x_3,\ldots,x_n) \in \mathrm{D}_f$

heißt *f* ***reellwertige Funktion von n Veränderlichen.***

D_f heißt ***Definitionsbereich von f*** und $x_1, x_2, x_3,\ldots,x_n$ heißen die ***unabhängigen Variablen***. Schreibweise: $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots,x_n)$.

Eine Funktion *f* ist **stetig** in D_f,wenn für **alle** konvergenten Folgen in D_f

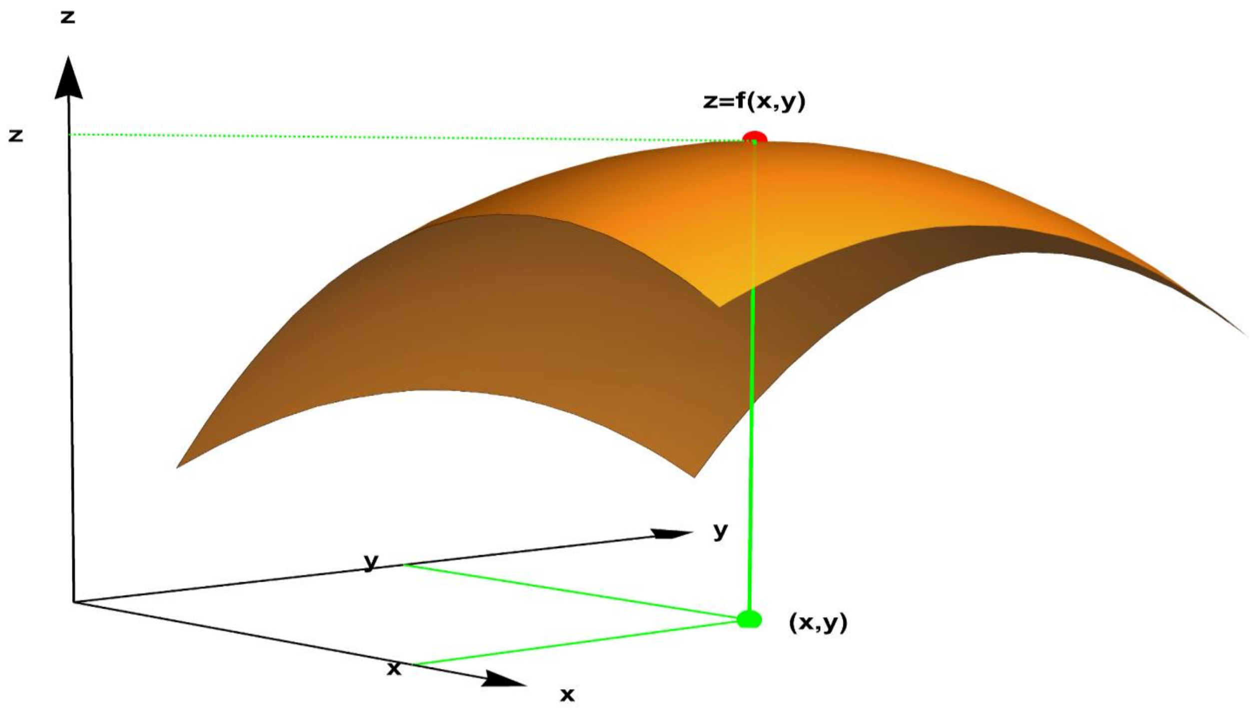
mit $\{\vec{x}_n\}_{n\in N} \subset D_f$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(\vec{x}_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n\right)$$

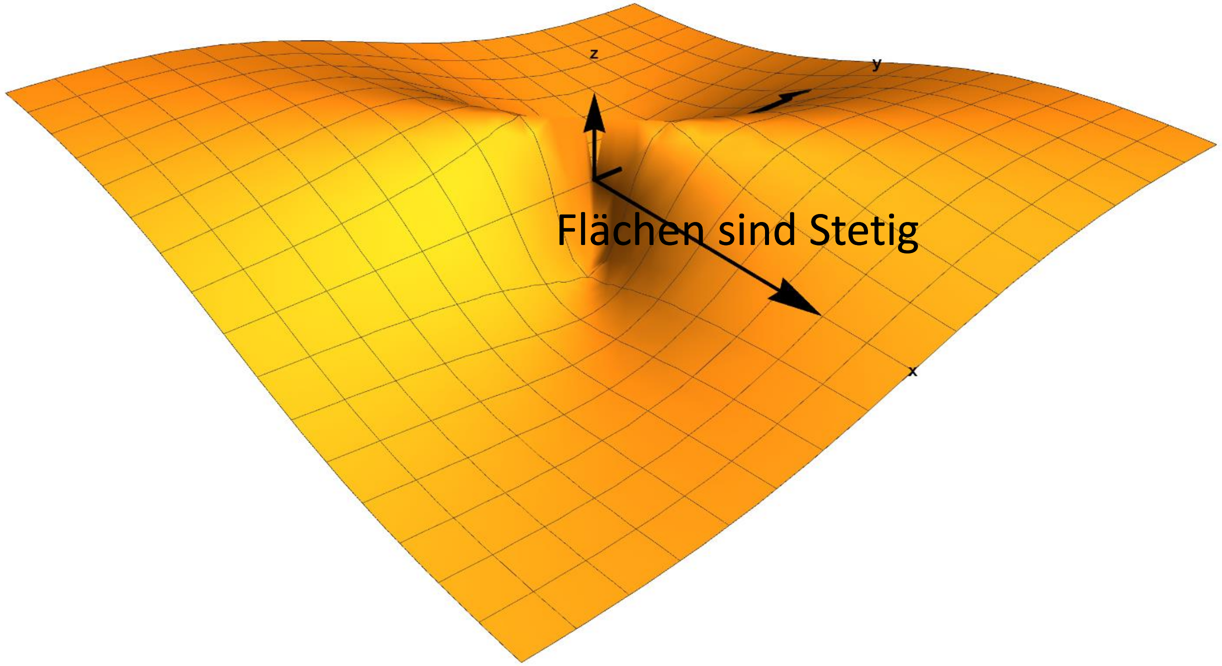
Dabei ist Konvergenz definiert mit Hilfe der Betragsfunktion.

$$|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,,$$

„Flächen“sind stetig



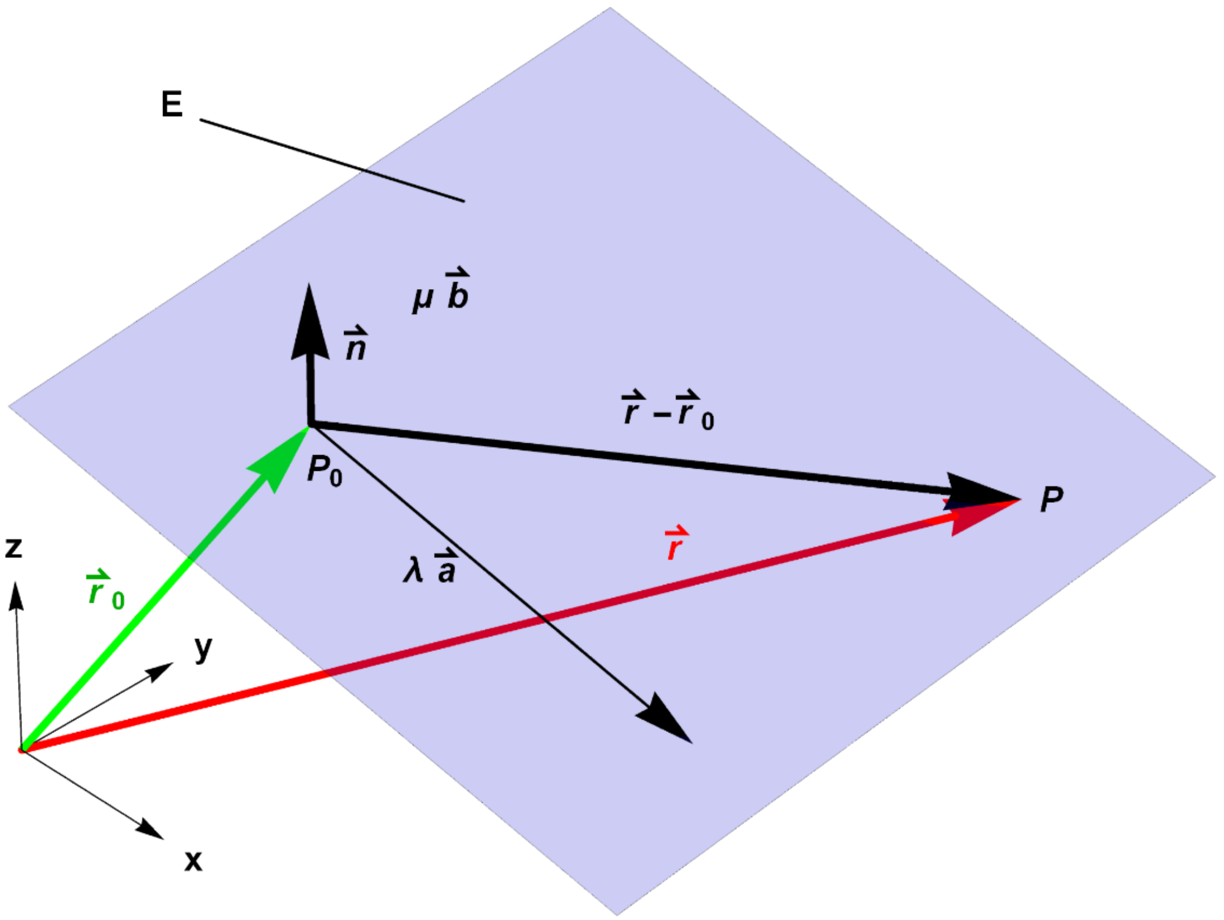
Nicht stetig: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$



https://drive.google.com/file/d/1_ypG-Xh98t0tJ0JgEzsJJ6a1T-KRd2XK/view?usp=sharing

Spezielle Flächen: Ebenen

$$\vec{r}(P) = \vec{r}(P_0) + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}),$$



Darstellungen von Ebenen

- die vektorielle Darstellung (s. Abbildung)

$$\vec{r}(P) = \vec{r}(P_0) + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}),$$

- die Hessesche Normalform

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0.$$

- die klassische Darstellung (bevorzugt in der Analysis)

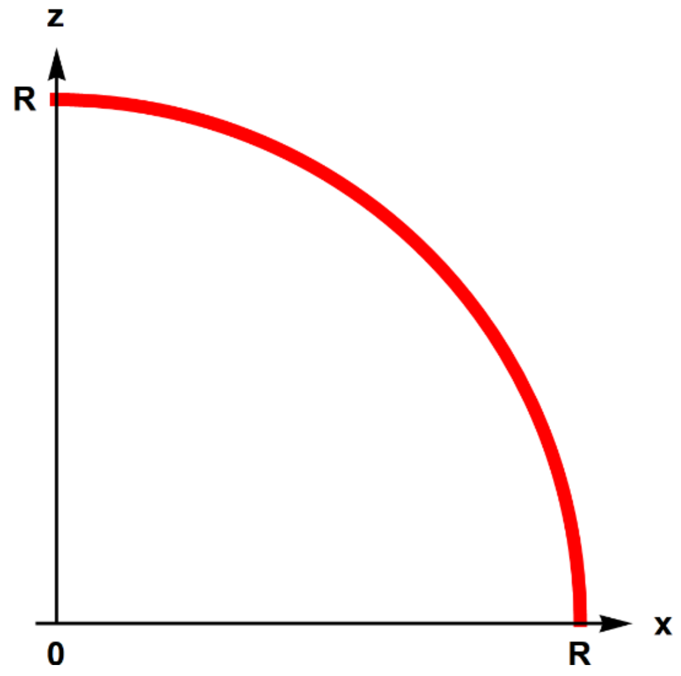
$$z = f(x, y) = \alpha x + \beta y + \delta$$

Linear in allen Variablen

Rotationsflächen

Beispiel 14.2 betrachte eine Funktion

$$z = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2},\ x \in [0, R]$$



Rotationsflächen

Rotation wird erzeugt durch Ersetzen x durch r

$$x \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dann ist

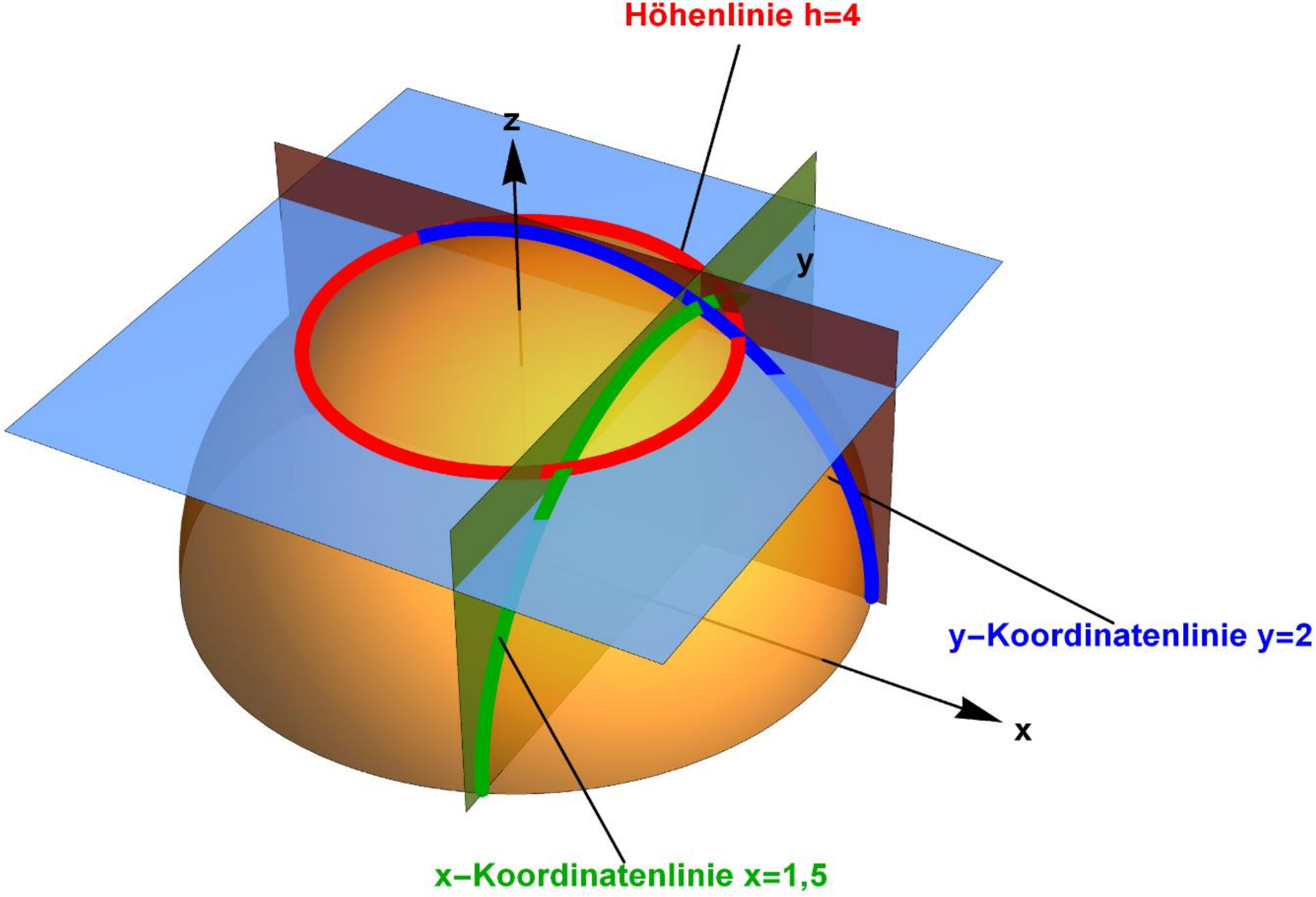
$$z = f(r) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$$

Damit entsteht eine

Halbsphäre, die durch den Viertelkreis erzeugt wird:

https://drive.google.com/file/d/1Ny8TZiIGSU9pZcruYqi-f8s7JSb2K8-Y/view?usp=sharing

Höhenlinien und Koordinatenlinien(R=5)



CDF Link:
https://drive.google.com/file/d/1irbpXiun3-4qTGdvlG6q_Cgs7Hl1V1G5/view?usp=sharing

Höhenlinien und Koordinatenlinien (R=5)

- Die ***Höhenlinie*** $z = 4$ hat die Form $\sqrt{25 - x^2 - y^2} = 4$ $\Longrightarrow$

  $$x^2 + y^2 = 25 - 16 = 9$$

  Dies ist ein Kreis mit dem Radius $3 = \sqrt{25 - 16}$.

- Die ***y-Koordinatenlinie*** $y = 2$ hat die Form $z = \sqrt{25 - x^2 - 4}$ $\Longrightarrow$

  $$x^2 + z^2 = 25 - 4 = 21$$

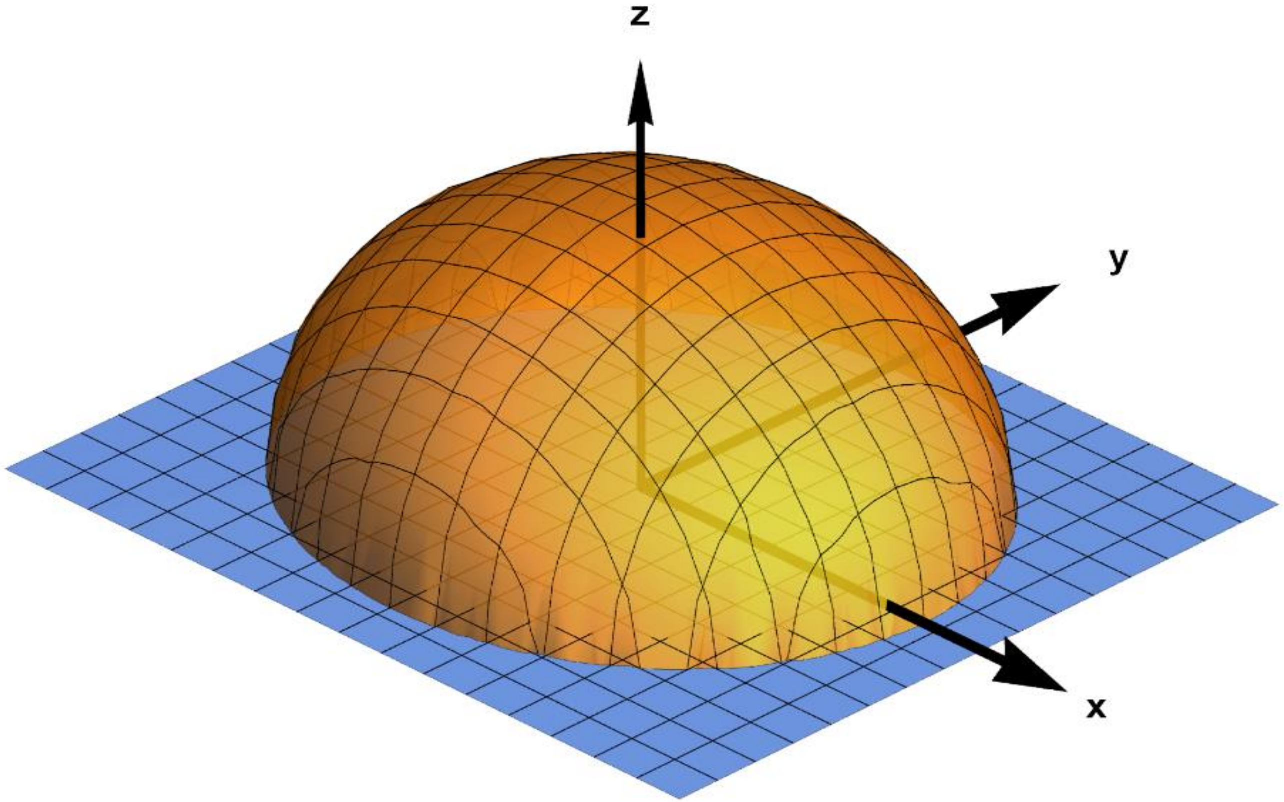
  Dies ist ein Halbkreis mit dem Radius $\sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$

- Die ***x*-Koordinatenlinie** $x = 1{,}5$ hat dann die Form $z = \sqrt{25 - y^2 - 2{,}25}$ $\Longrightarrow$

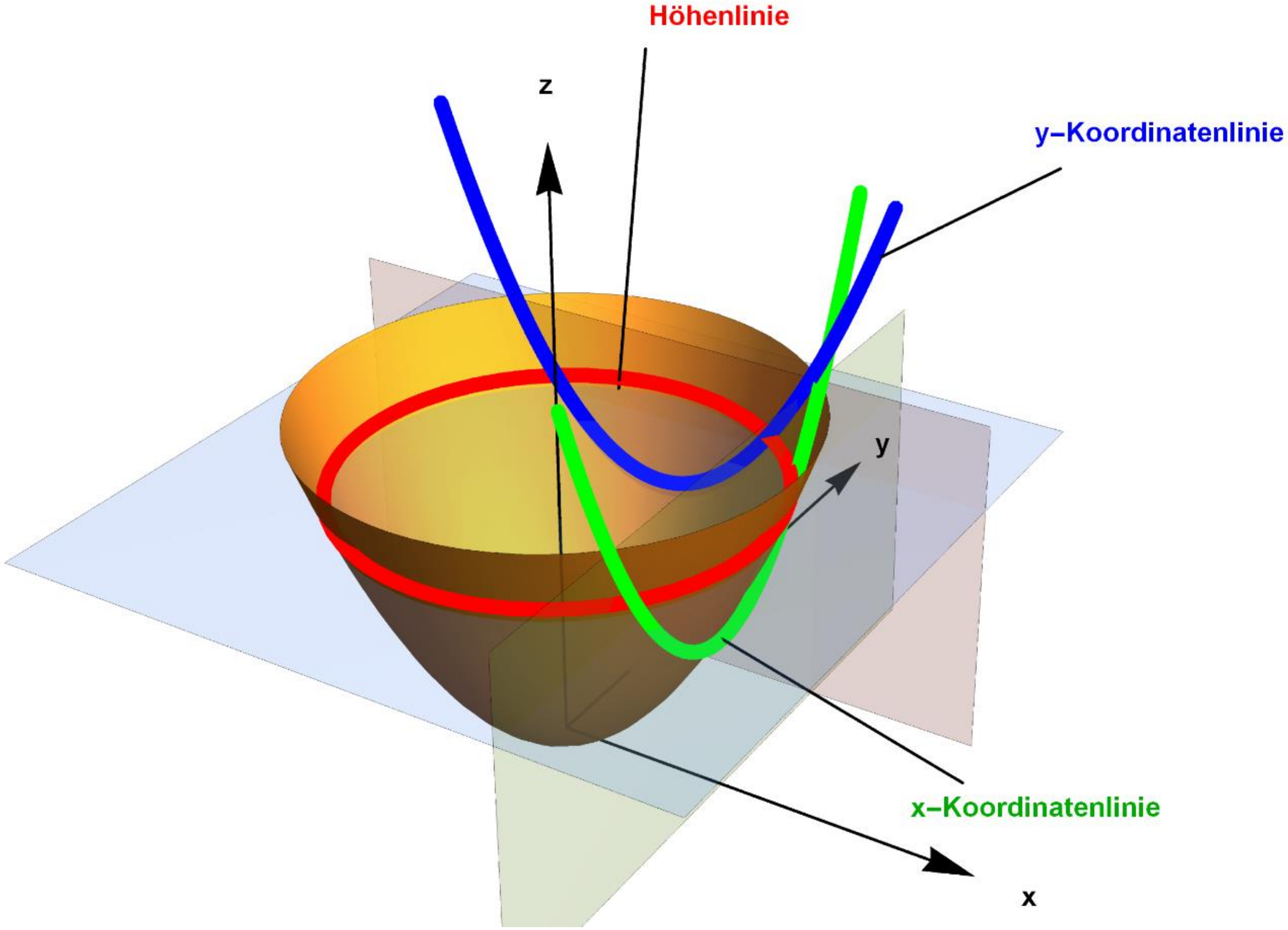
  $$y^2 + z^2 = 22{,}75,$$

  Dies ist ein Halbkreis mit dem Radius $\sqrt{25 - 2{,}25} = \sqrt{22{,}75}$.

Koordinatennetz

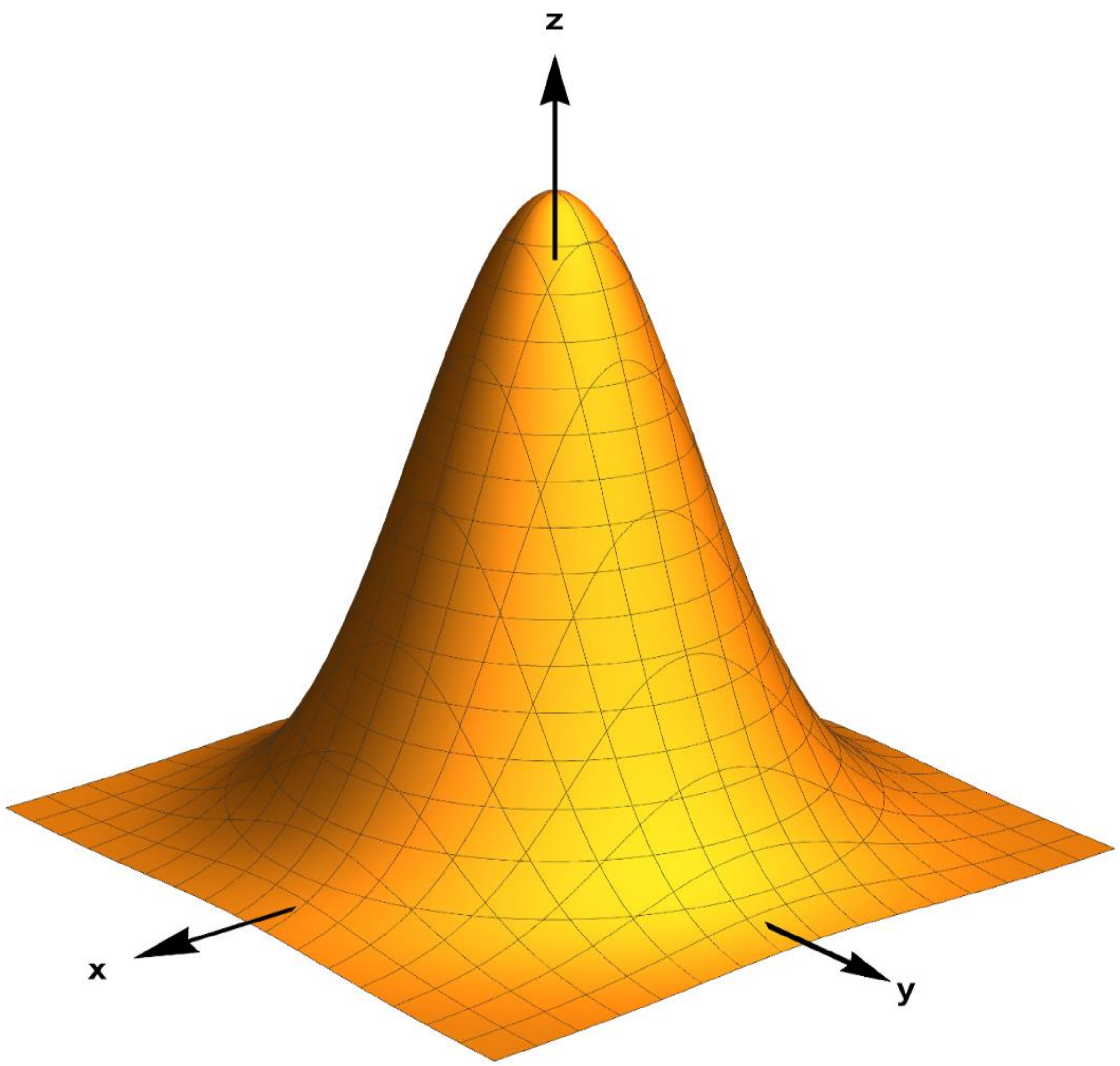


Paraboloid mit Koordinatenschnittlinien

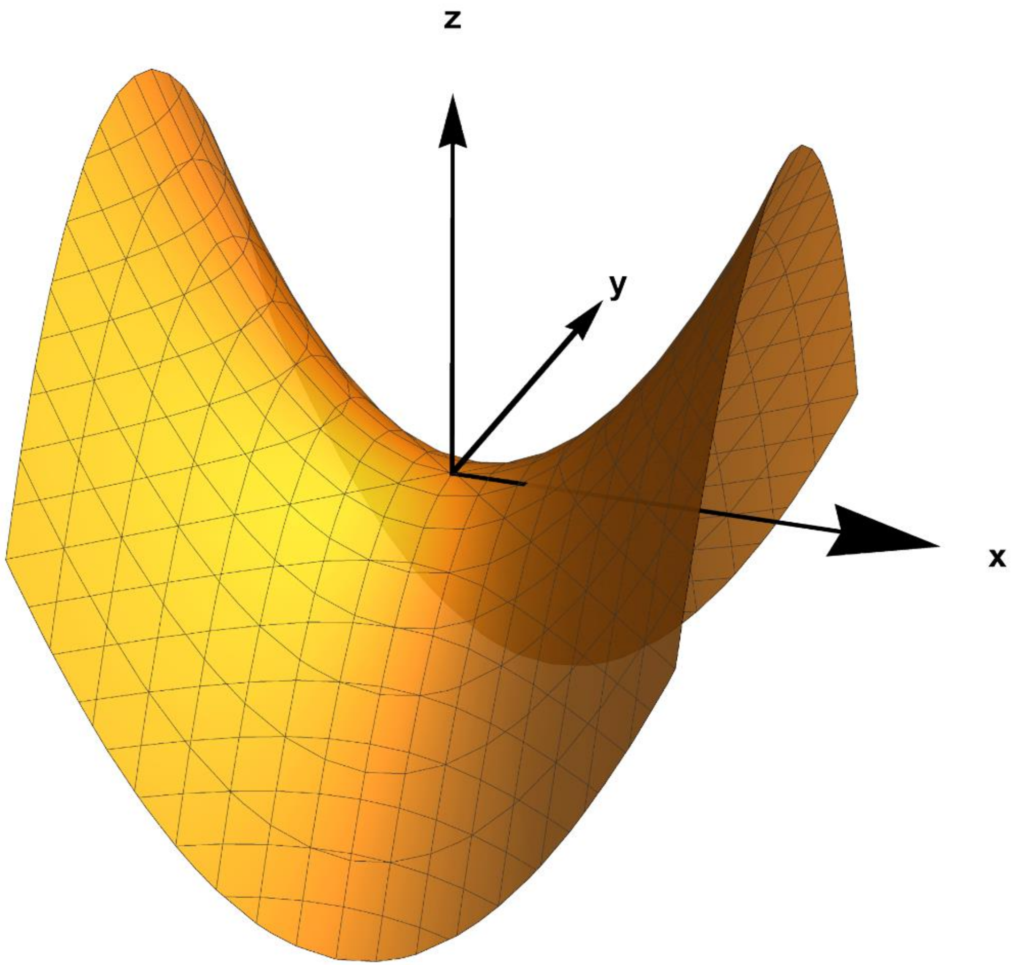


CDF Link:
https://drive.google.com/file/d/15dOeNcYBtloOX-kldAuEfEOzDtBygGSz/view?usp=sharing

.Gaußsche Glockenfunktion $z = e^{-(x^2+y^2)}$

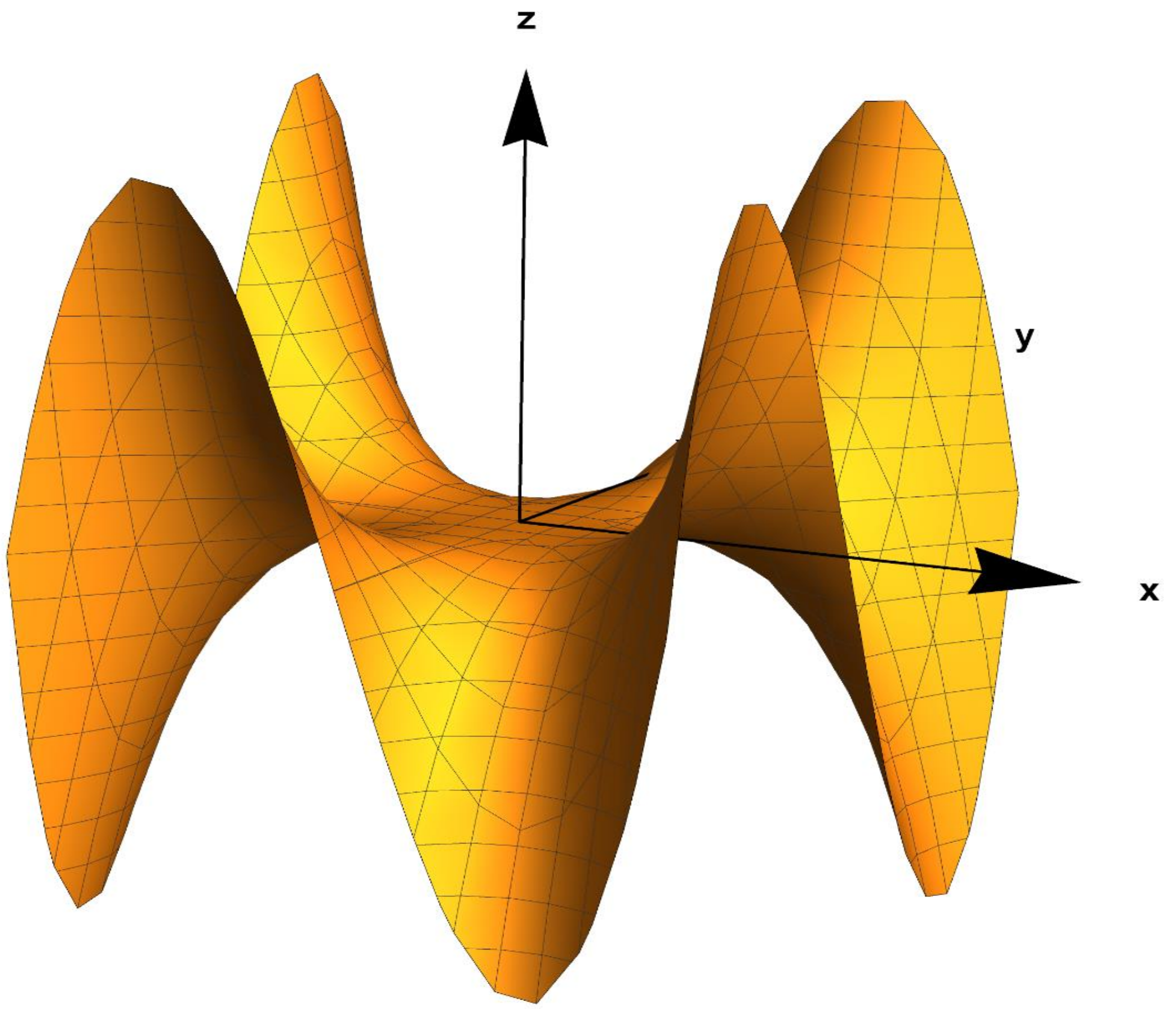


Sattelfläche $z = x^2 - y^2$



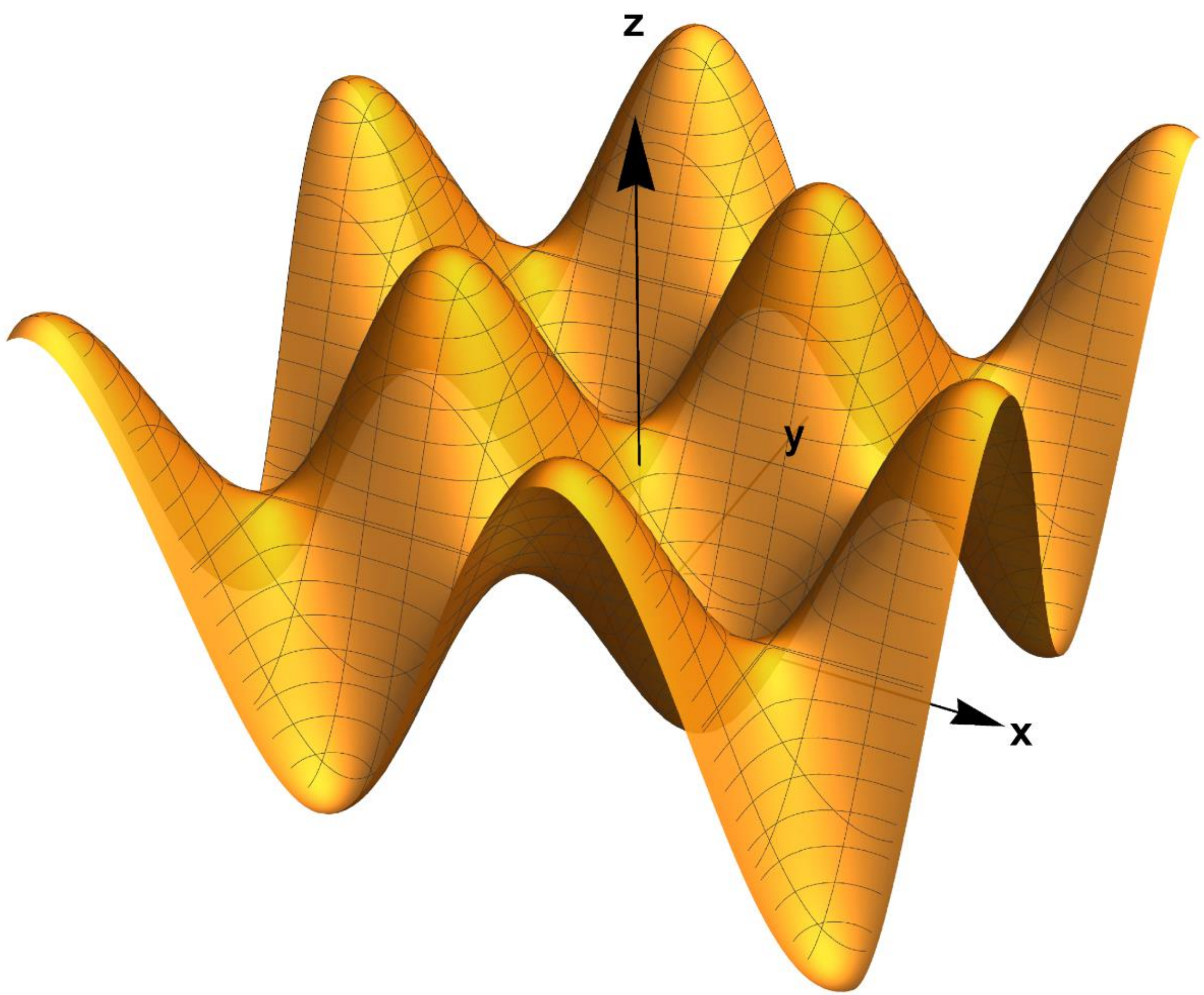
https://drive.google.com/open?id=1Ec-ZLe6DVkEirMNzXwFWiiMM92WvMjFZ

„Hexensattel“ $z = (x - y)^2 - (x + y)^2 (x - y)^2$



https://drive.google.com/file/d/1tIIozDlSn20E0tkdCzT-YY9QyJNr_Bu1/view?usp=sharing

„Eierkarton“ $z = \mathbf{sin}(x)\,\mathbf{sin}(y)$



https://drive.google.com/file/d/1nWlKZ05G2-CTTC2q4KM8QxQ2TNdWMLgw/view?usp=sharing