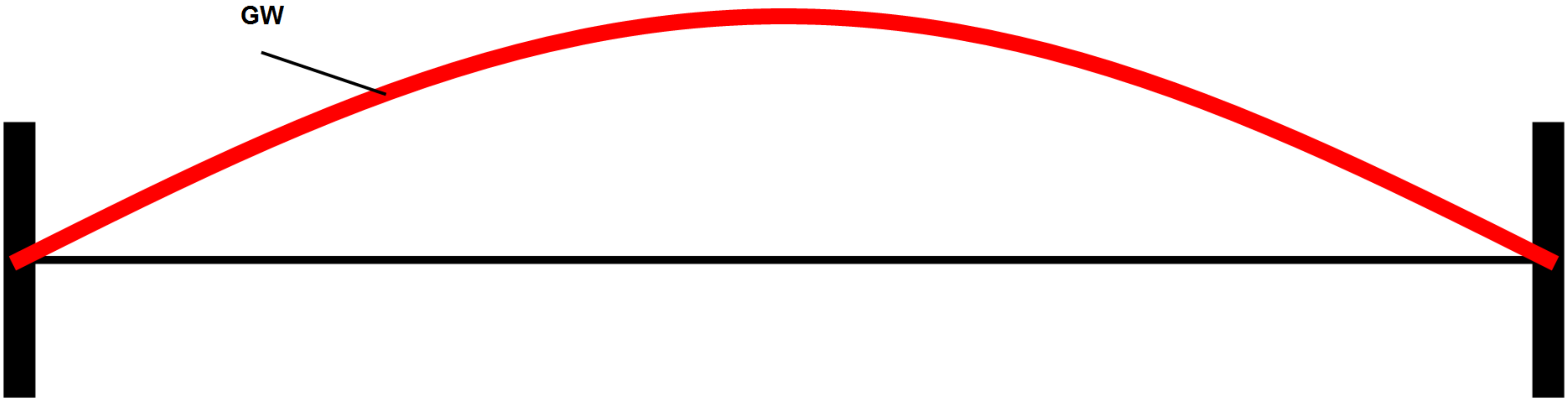
1.1. Reelle Fourier Reihen

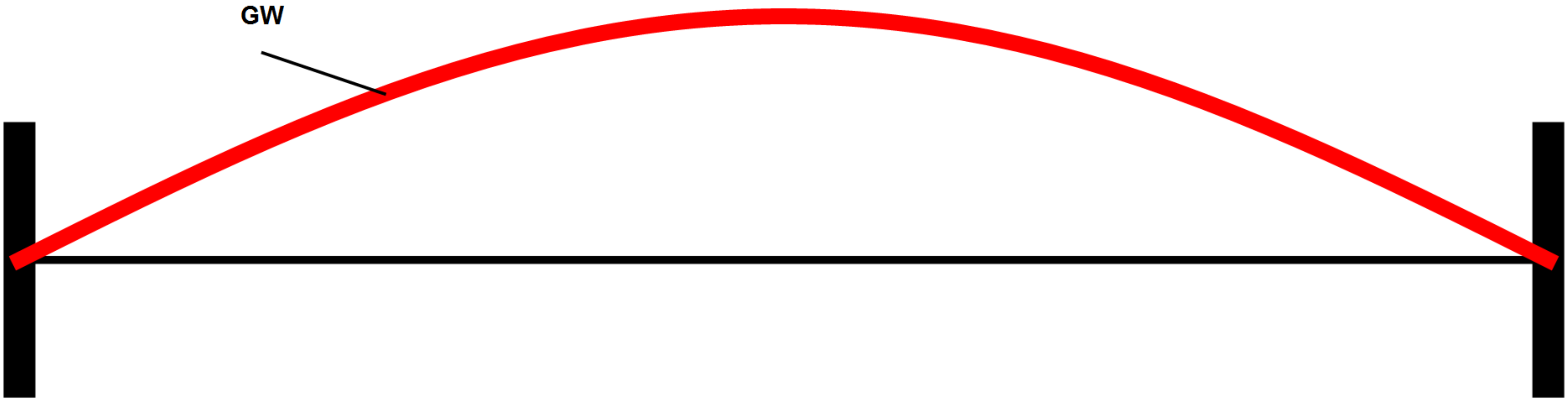
Bevor wir über Fouriertransformationen genauer reden, betrachten wir zunächst reelle und dann komplexe Fourier Reihen.

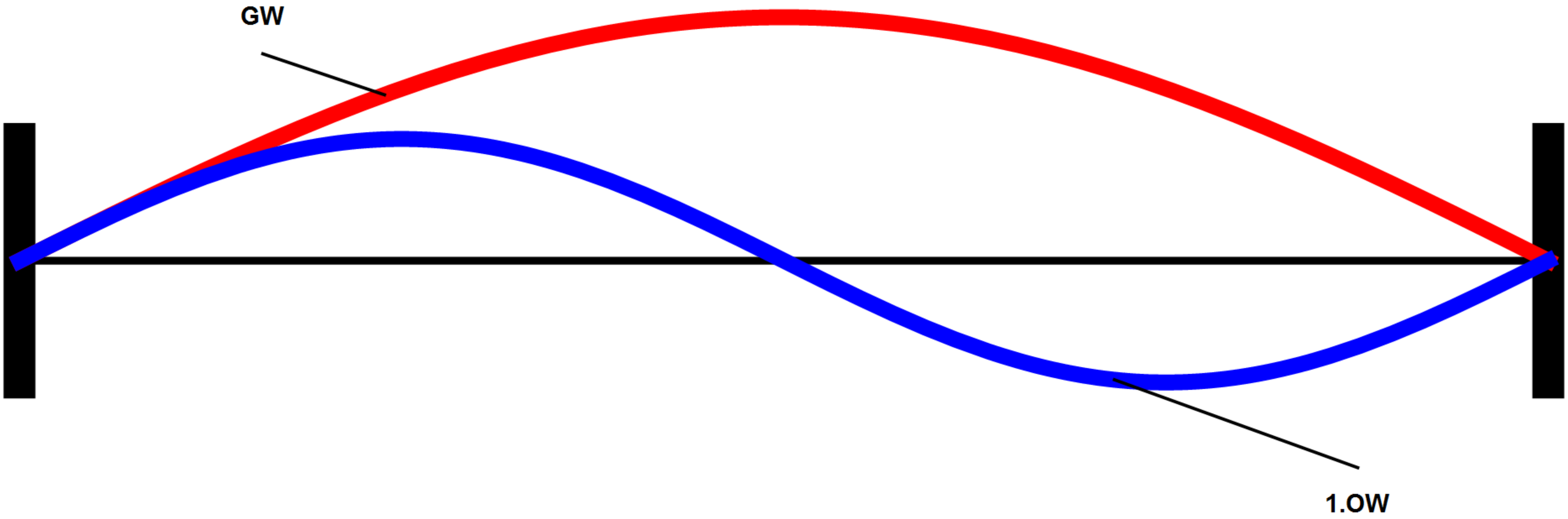
Das physikalische Modell einer reellen Fourier Reihe ist eine an beiden Seiten eingespannte Saite.

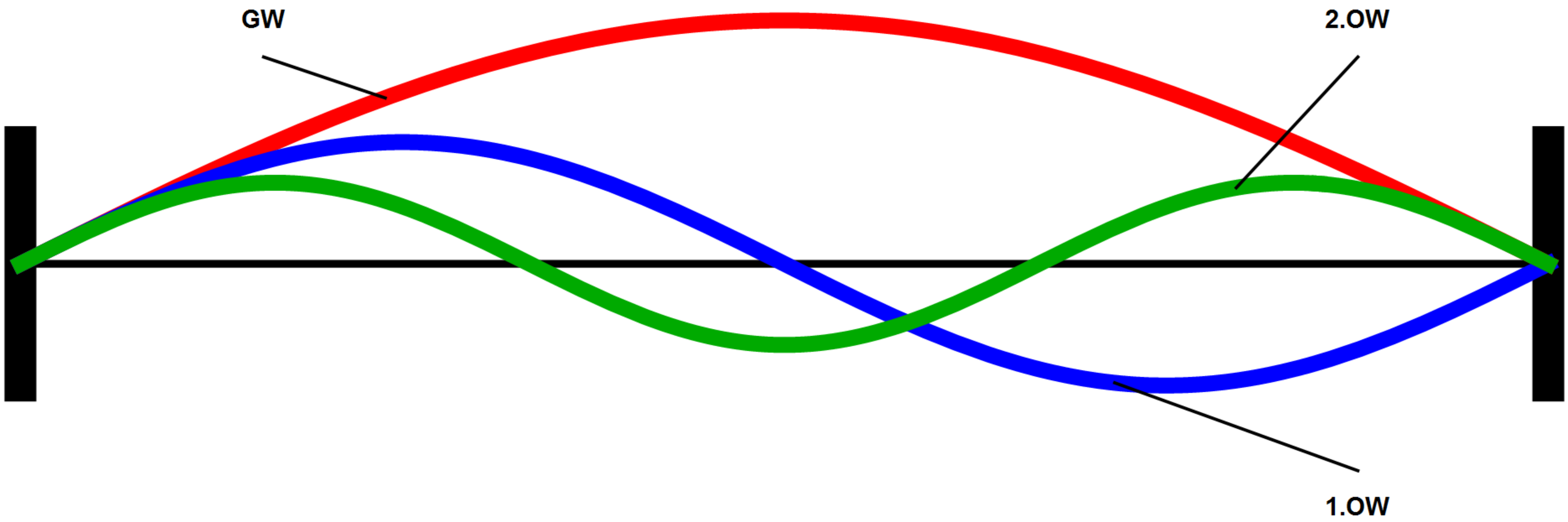

GW

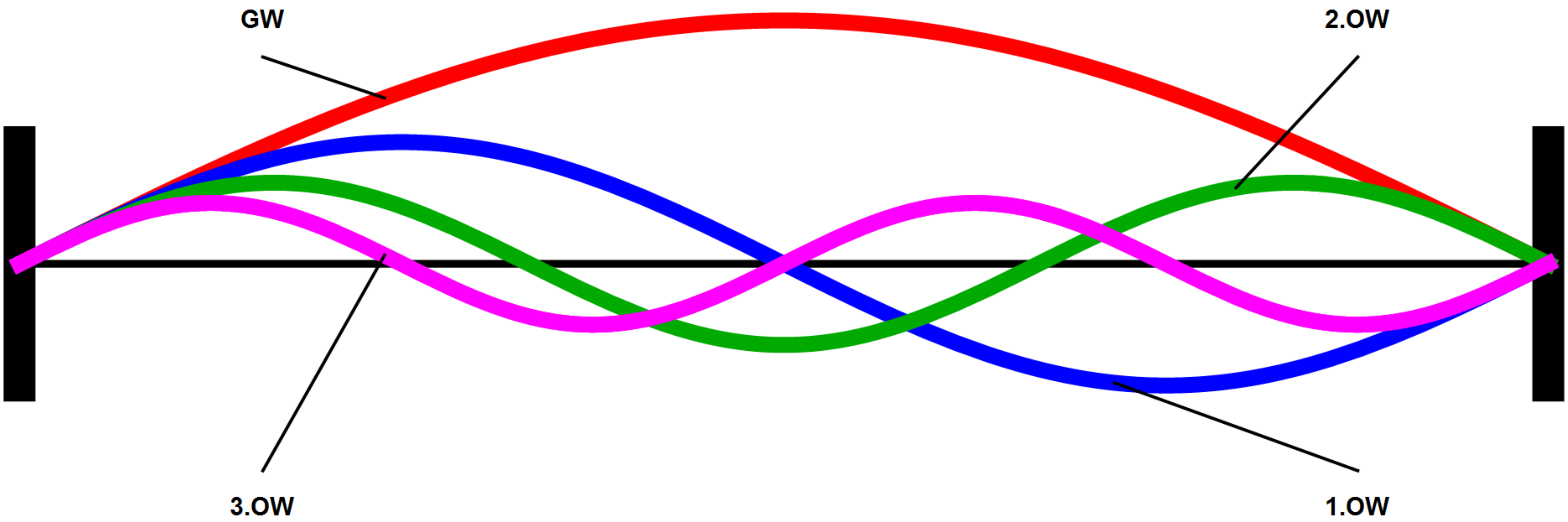
- Wenn dies Saite angezupft wird, entstehen „stehende“ Wellen. Das sind Schwingungen bei denen die eingespannten Enden fest stehende „Schwingungsknoten“ sind.

- Neben der Grundschwingung (GW) gibt es abzählbar viele Oberwellen (OW) deren Frequenz ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz sind


GW


GW
1.OW


GW
2.OW
1.OW


GW
2.OW
3.OW
1.OW

Wenn man diese „Wellen“ addiert entsteht eine Funktion

f = GW + 1.OW + 2.OW+…

und dies ergibt die tatsächliche Schwingform der Saite (pysikalisches Modell)

Mathematische Beschreibung:
Wenn man die Funktion f periodisch fortsetzt hat man f als Summen vom Typ

$$f(t) = \sum_{k=1} b_k Sin(k\,\omega_0 t) \quad ,$$

wobei ω_0 die Grundfrequenz ist und $b_k$die Amplituden der einzelnen (Sinus-) Wellen sind.

Dies führt verallgemeinert zur **Mathematische Formulierung**:

Eine periodische Funktion f(t) mit der (kleinsten) Periode T kann man „entwickeln“ in eine Trigonometrische Reihe

$$f(t) = FR(t) \coloneqq \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t))$$

Dabei ist $\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$ die Grundfrequenz und die „Fourierkoeffizienten“

ergeben sich aus

$$a_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} f(t) \cdot \cos(k\omega_0 t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} f(t) \cdot \sin(k\omega_0 t) dt$$

Bemerkungen:

(1) Die Lage des Integrationsbereichs T spielt keine Rolle (Periodizität des Integranden)

(2) zum Begriff der Reihe:

∞- Summen existieren nicht als Summe

sondern die Folge der einzelnen Partialsummen $P_n(t)$

$$P_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k cos(k\omega_0 t) + b_k sin(k\omega_0 t)\right)$$

ergibt im „Grenzwert“ (wenn n $\rightarrow \infty$ *geht)*

$$FR(t) := \lim_{n\rightarrow\infty}(P_n(t))$$

geschrieben als „unendliche Summe“, genannt ***Fourier Reihe***

$$f(t) = FR(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k cos(k\omega_0 t) + b_k sin(k\omega_0 t))$$

(3) Man kann diese Gleichungen in zwei Richtungen lesen:

Die Zerlegung einer periodischen Funktion f in ihre Sinus- und Cosinus - Anteile heißt ***Fourier Analyse*** (Zerlegung in Harmonische Anteile) .

$$f \longrightarrow \{a_k, b_k\}$$

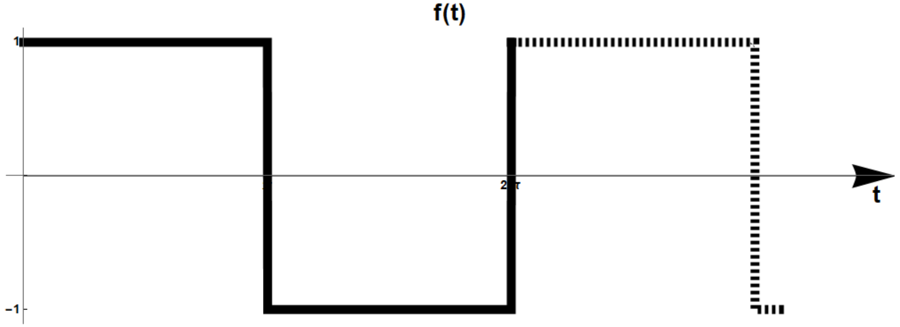
Umgekehrt kann man aus den einzelnen Anteilen die ursprüngliche Funktion f wieder durch sukzessive Approximation rekonstruieren. Dieser Prozess heißt ***Fourier-Synthese.***

$$\{a_k, b_k\} \longrightarrow f$$

Anschaulich kann man die einzelnen Partialsummen $P_n(t)$ der Fourierreihe als Approximationen der Funktion f interpretieren:

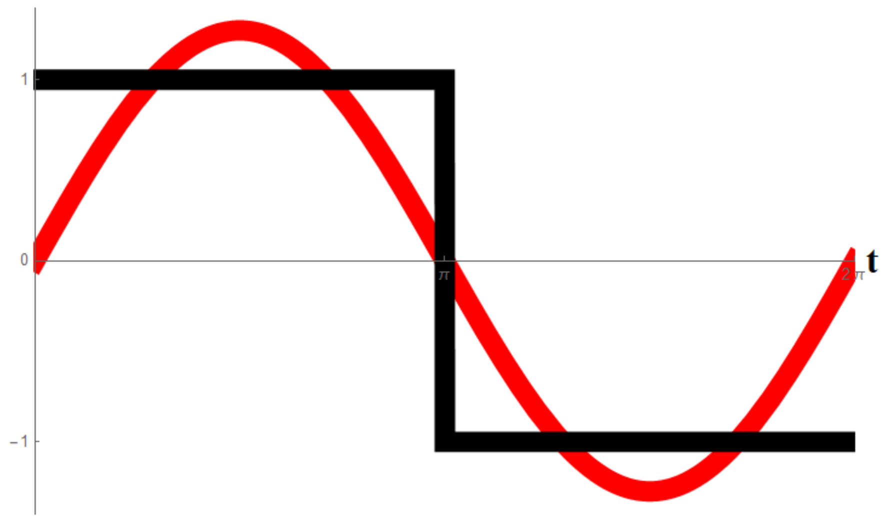
$$P_n(t) = \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right)$$

Beispiel: f(t) wird approximiert durch Summen der Sinusfunktionen

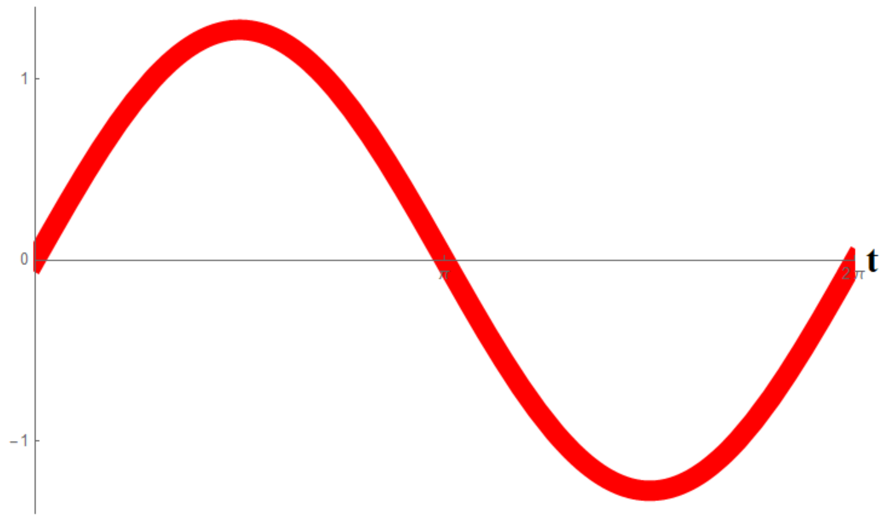


$$\sum_{k=1}^{n} b_k Sin(k\,\omega_0 t)$$

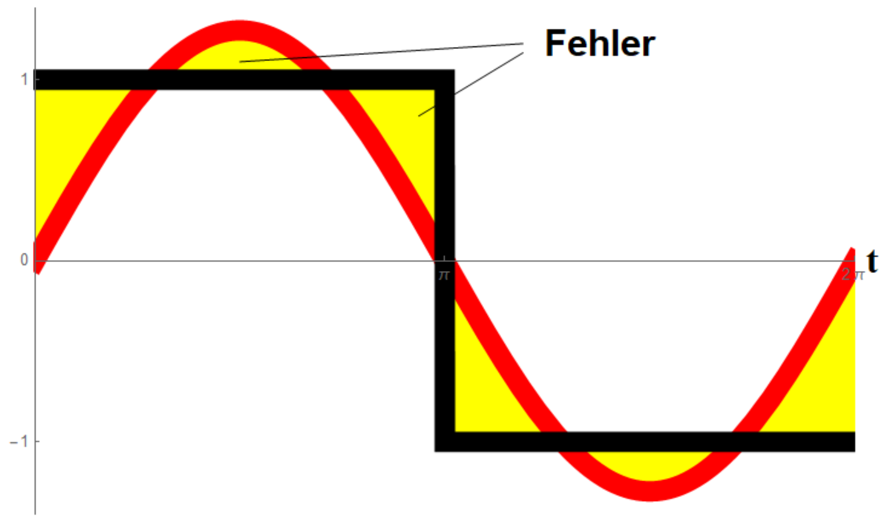
1.Approximation



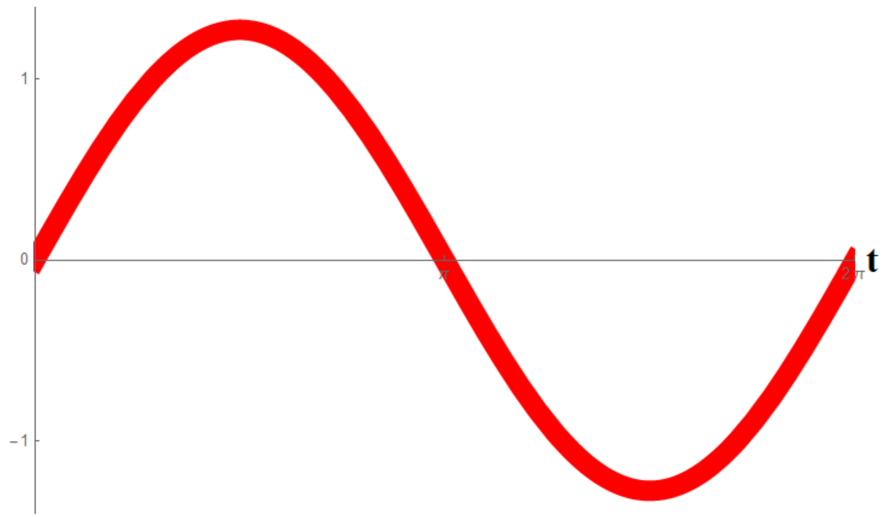
Summanden der Fourierreihe



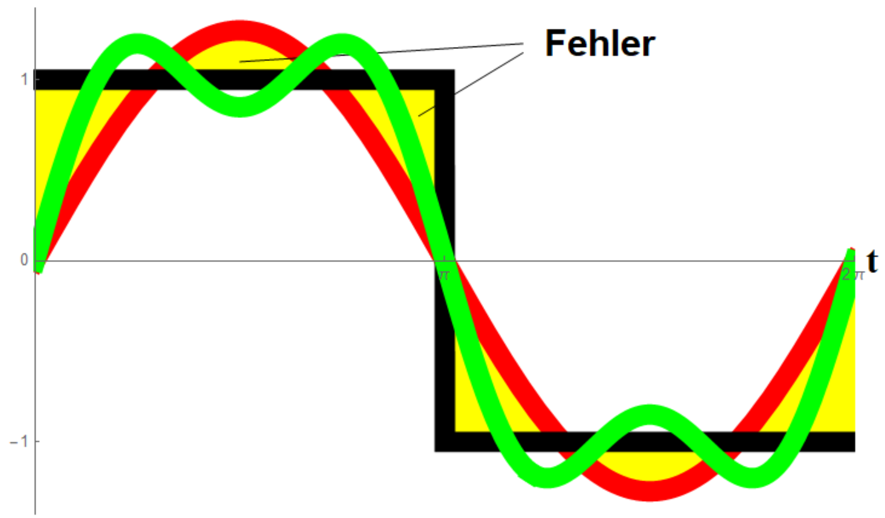
1.Approximation



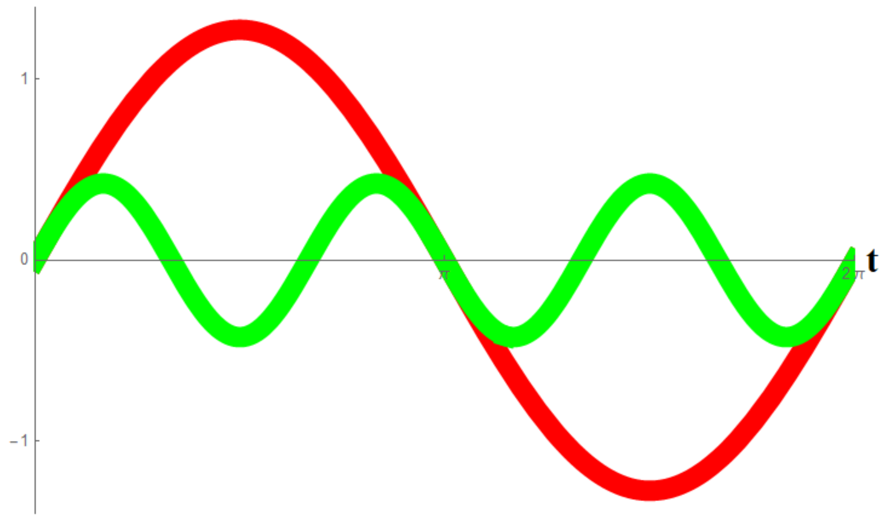
Summanden der Fourierreihe



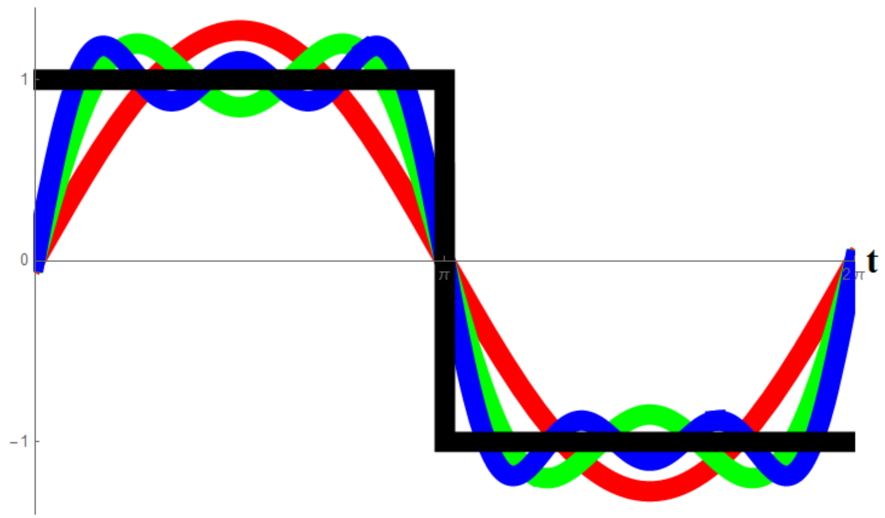
2.Approximation



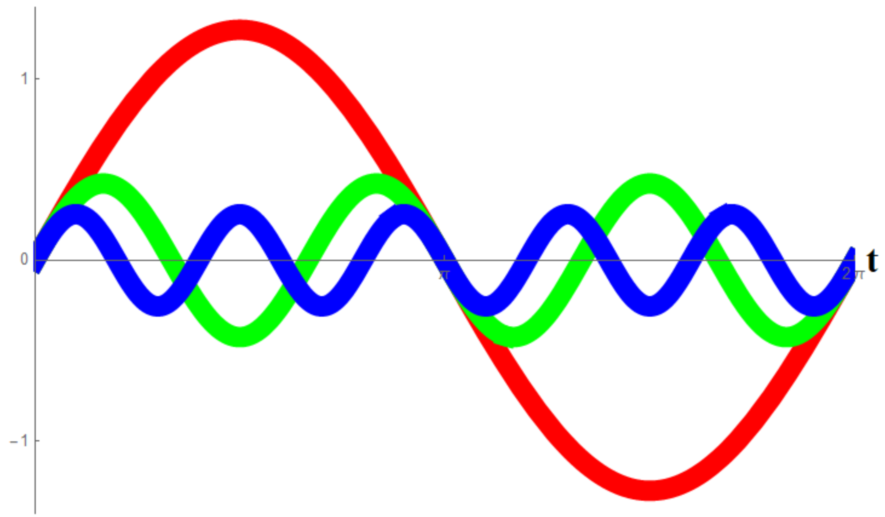
Summanden der Fourierreihe



3.Approximation



Summanden der Fourierreihe

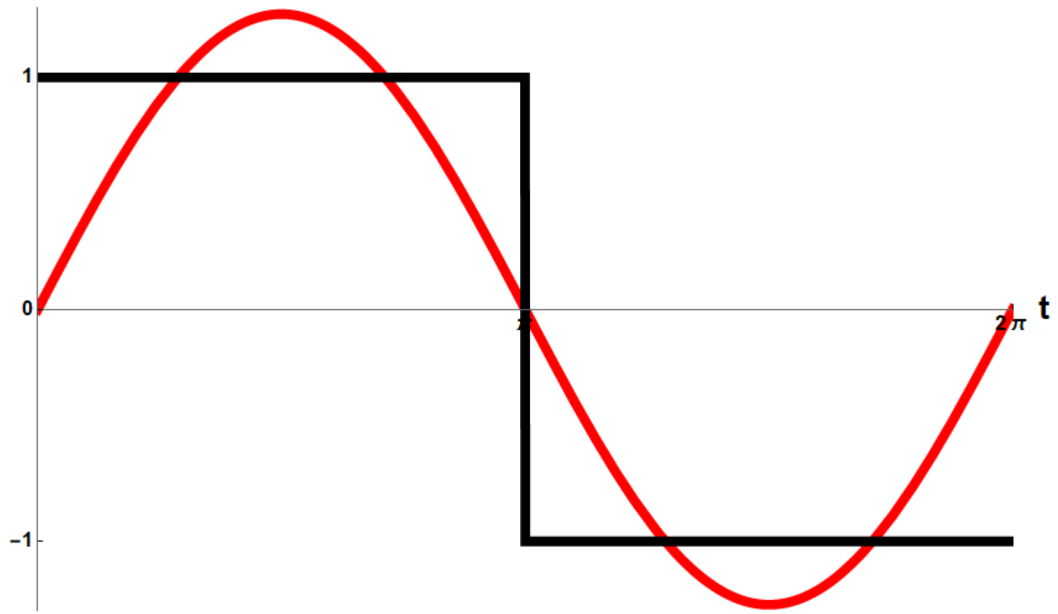


Die Fehler werden somit immer kleiner und die Funktion wird immer besser approximiert.

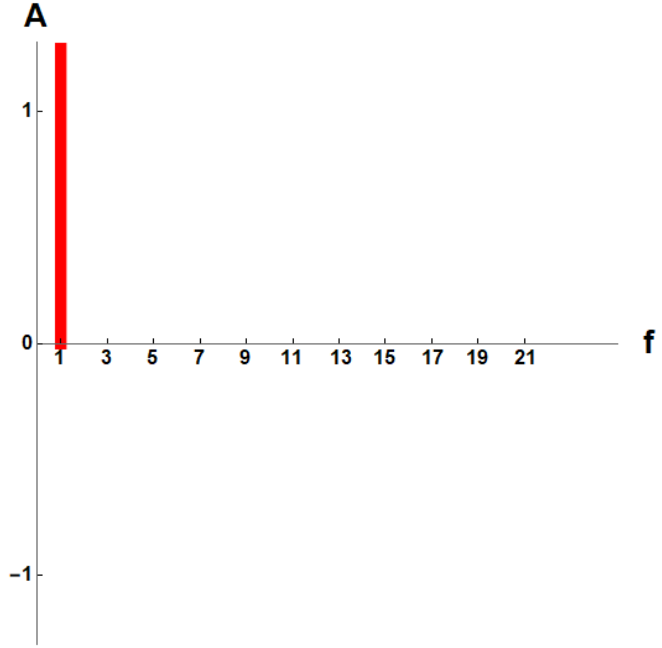
Weiterhin entsteht das sogenannte**Reelle Spektrum**:

Wenn man die Amplituden b_k der einzelnen Sinuswellen $b_k Sin(k\omega_0 t)$ über der Frequenzachse aufträgt, erhält man das **Amplitudenspektrum** der Funktion f:

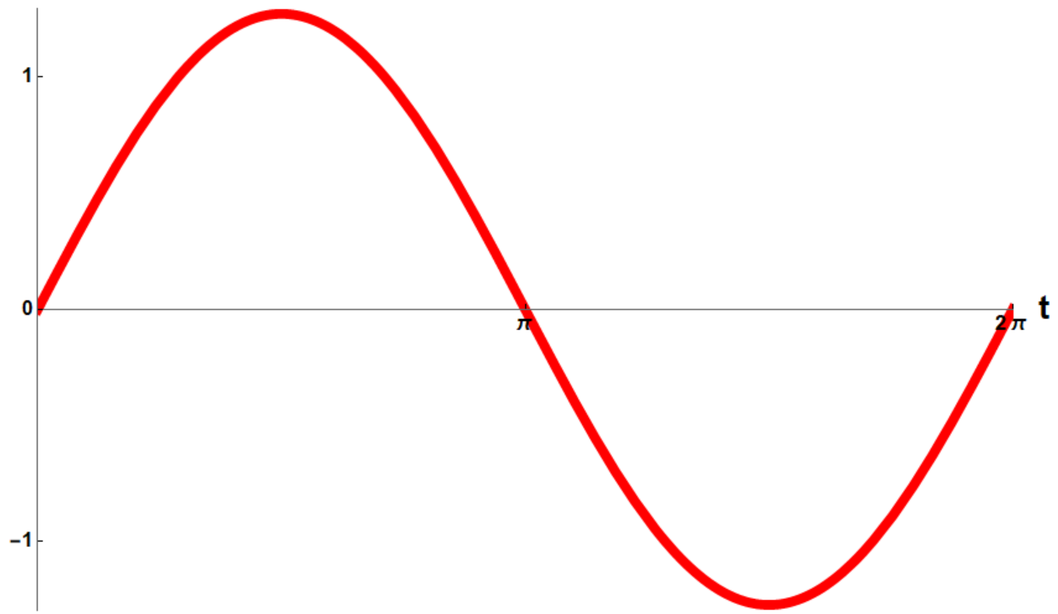
Approximationen



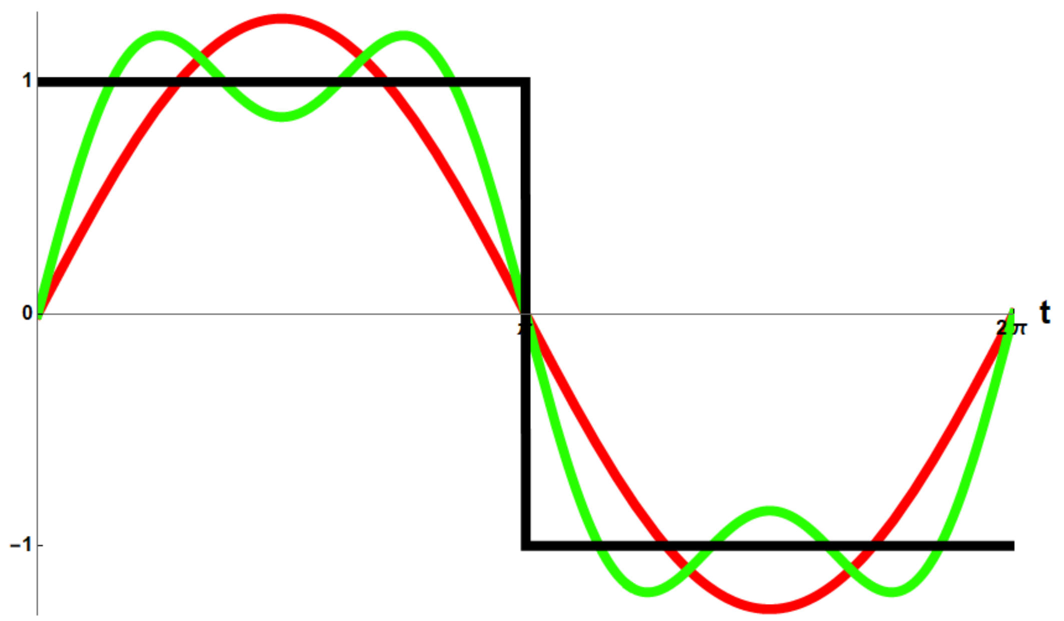
Spektrum



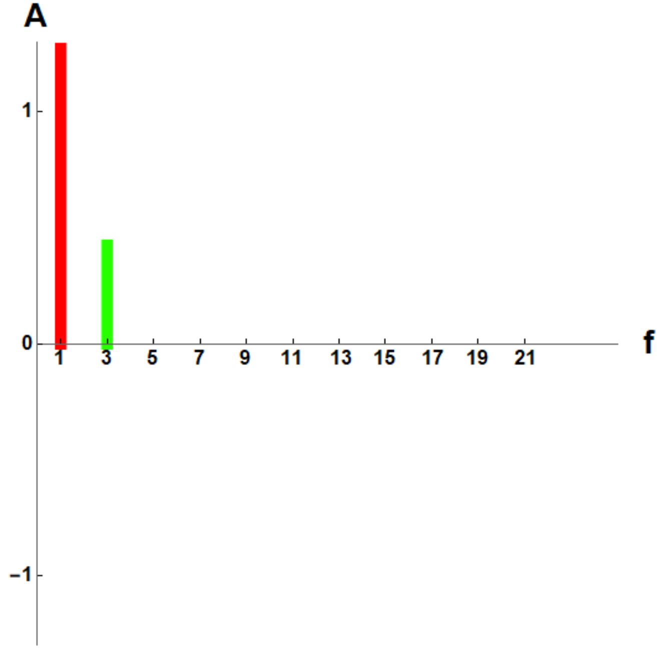
Summanden der Fourierreihe



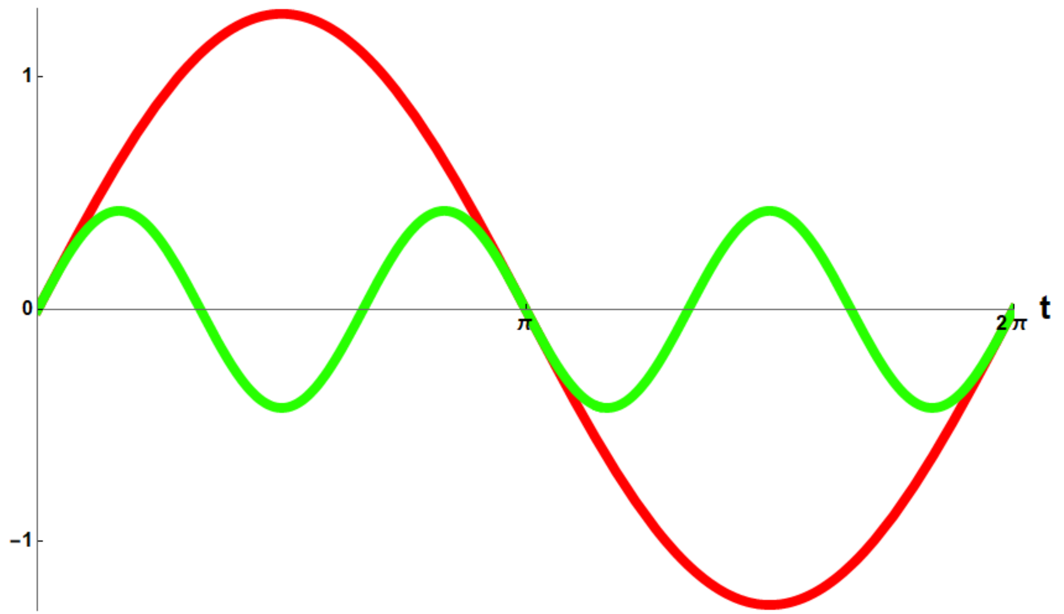
Approximationen



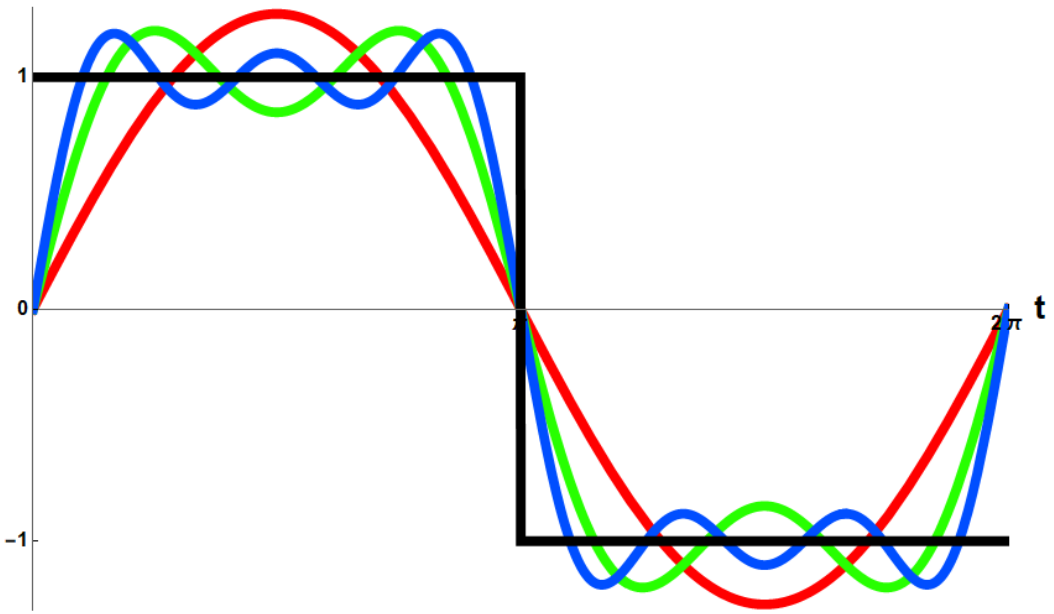
Spektrum



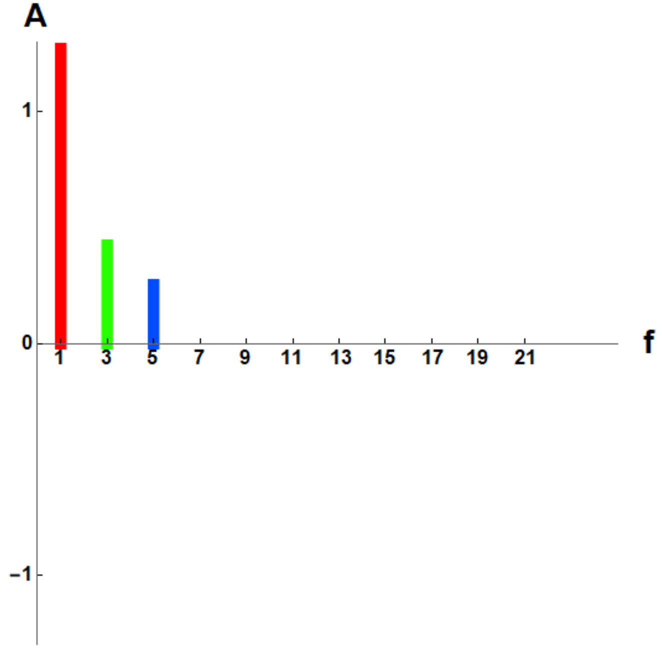
Summanden der Fourierreihe



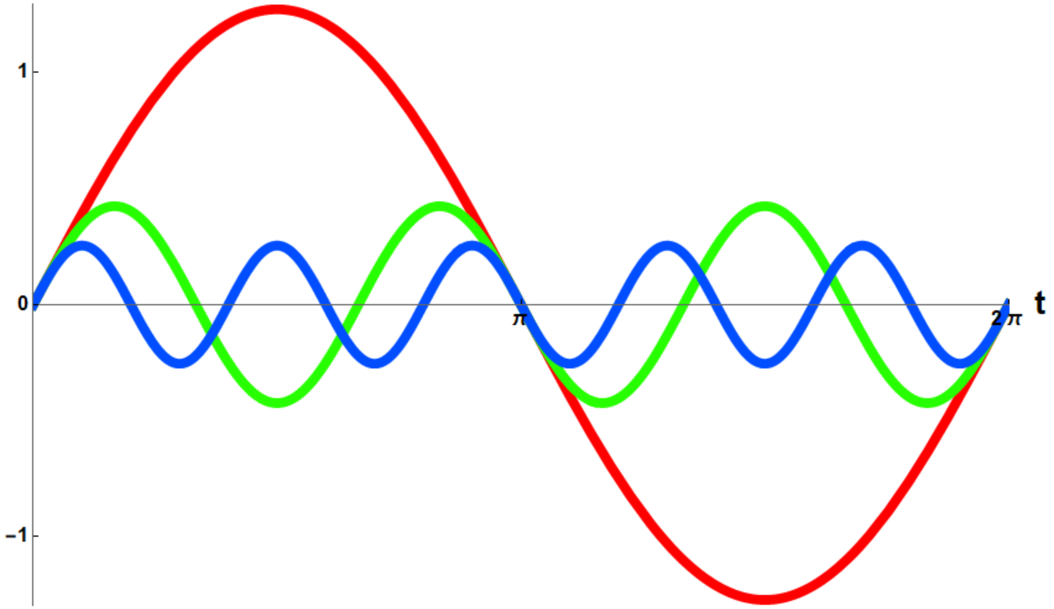
Approximationen



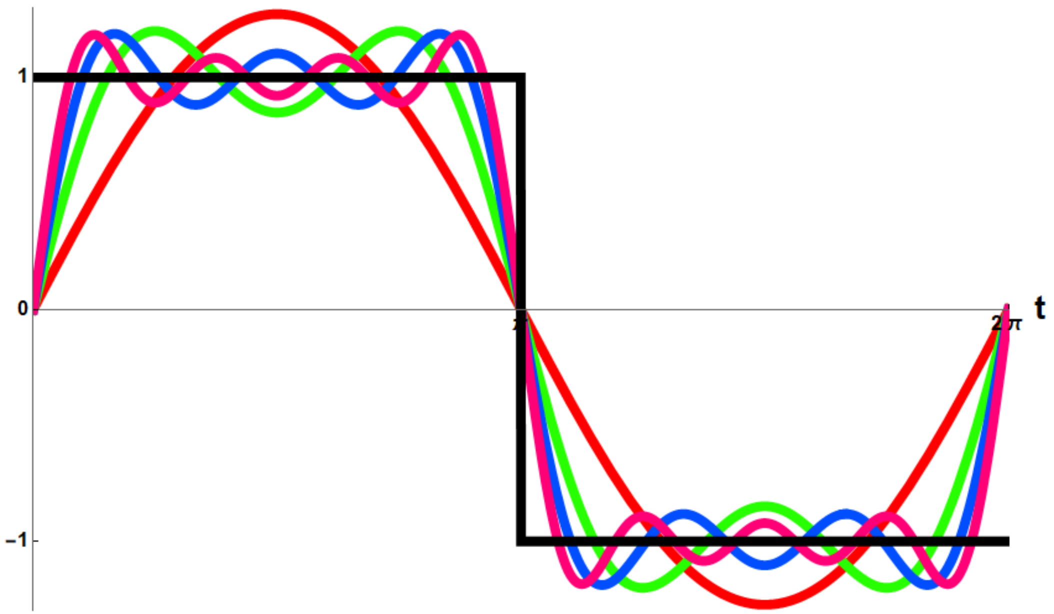
Spektrum



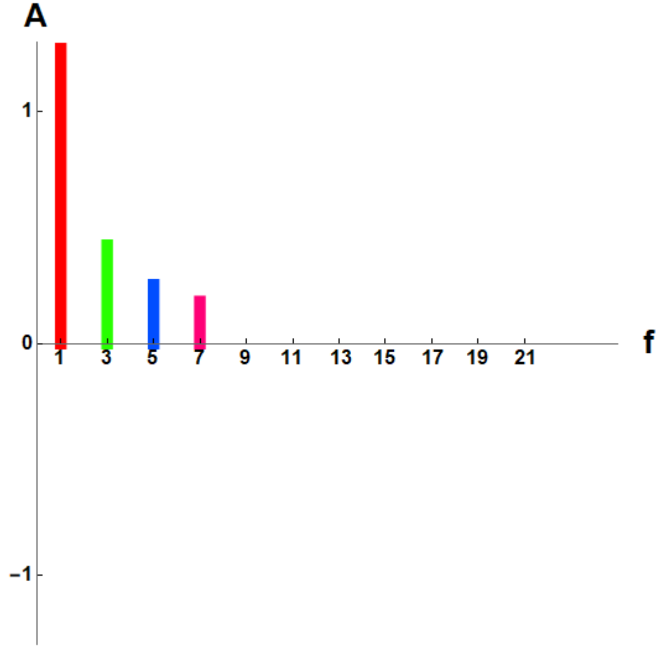
Summanden der Fourierreihe



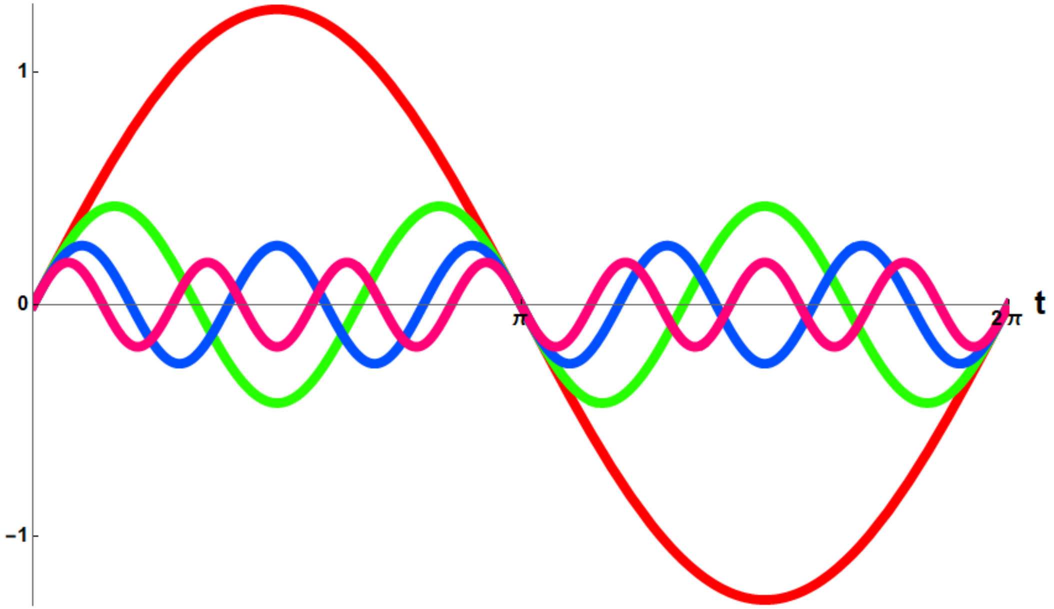
Approximationen



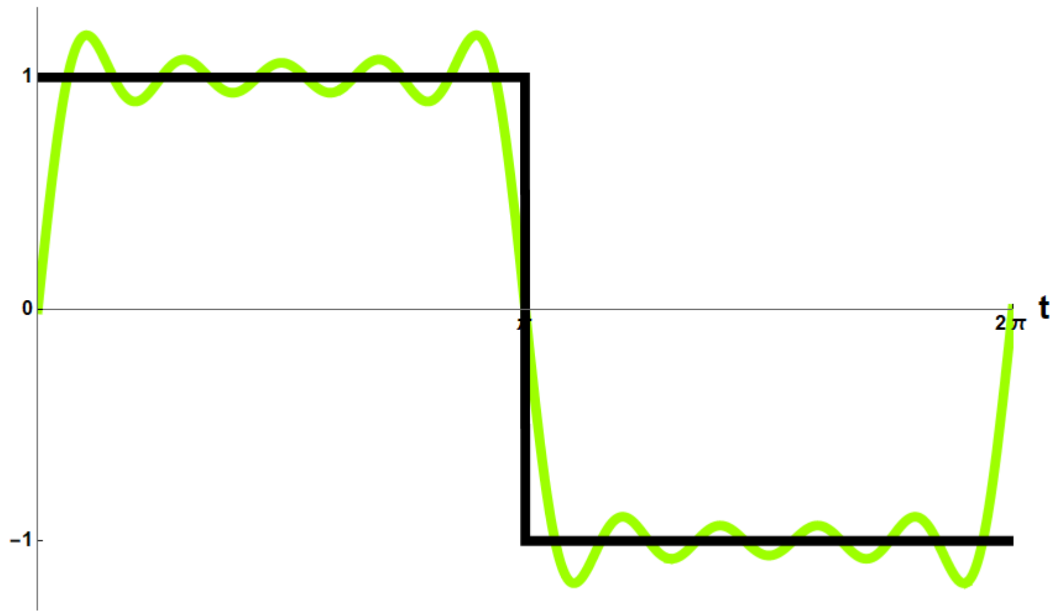
Spektrum



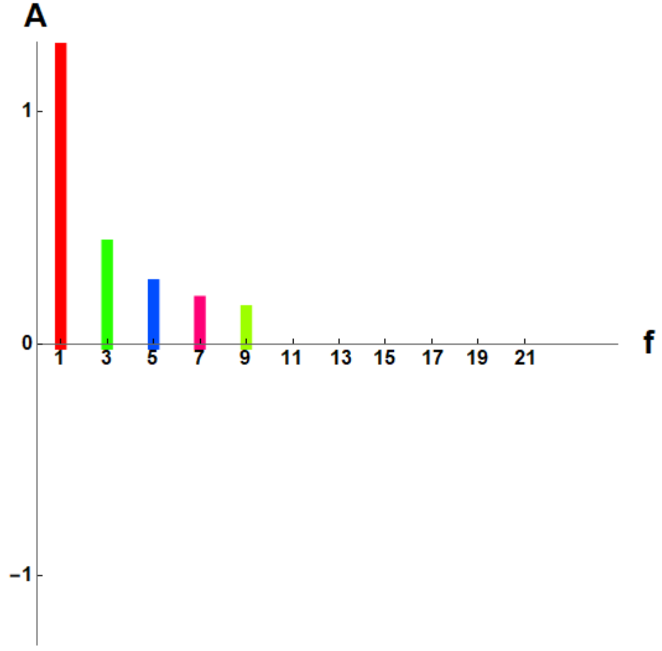
Summanden der Fourierreihe



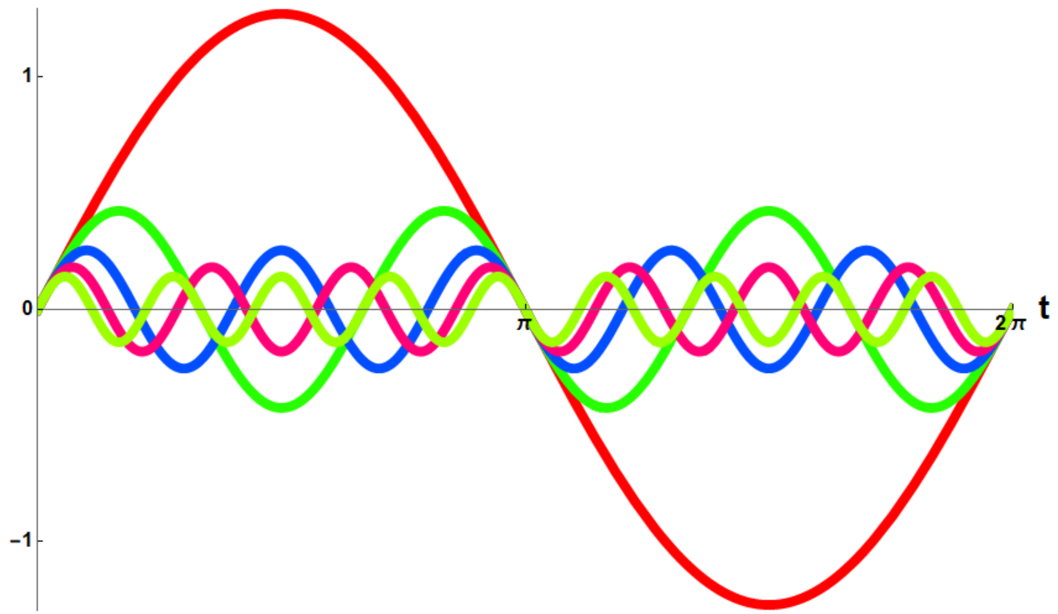
Approximationen



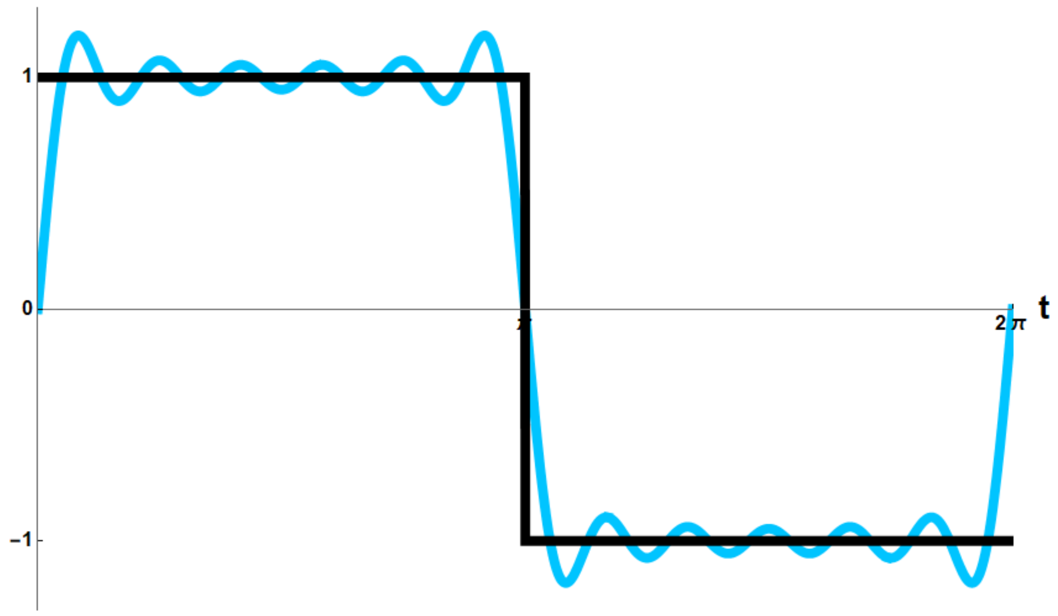
Spektrum



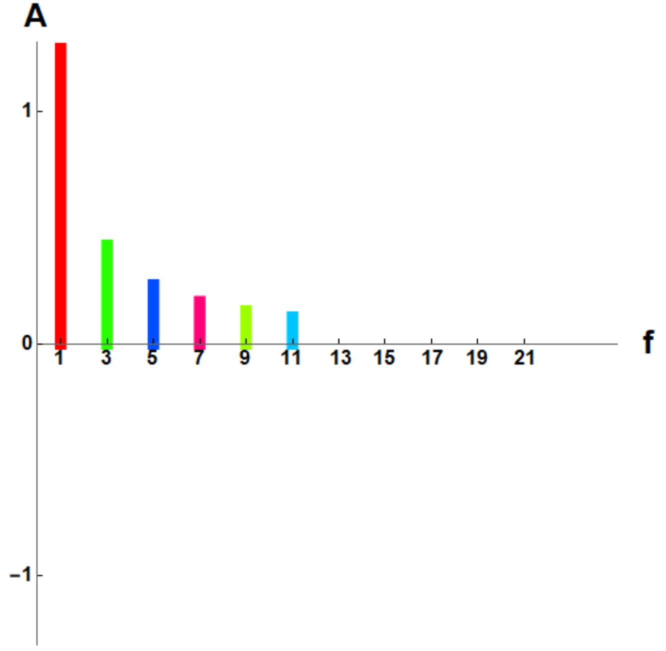
Summanden der Fourierreihe



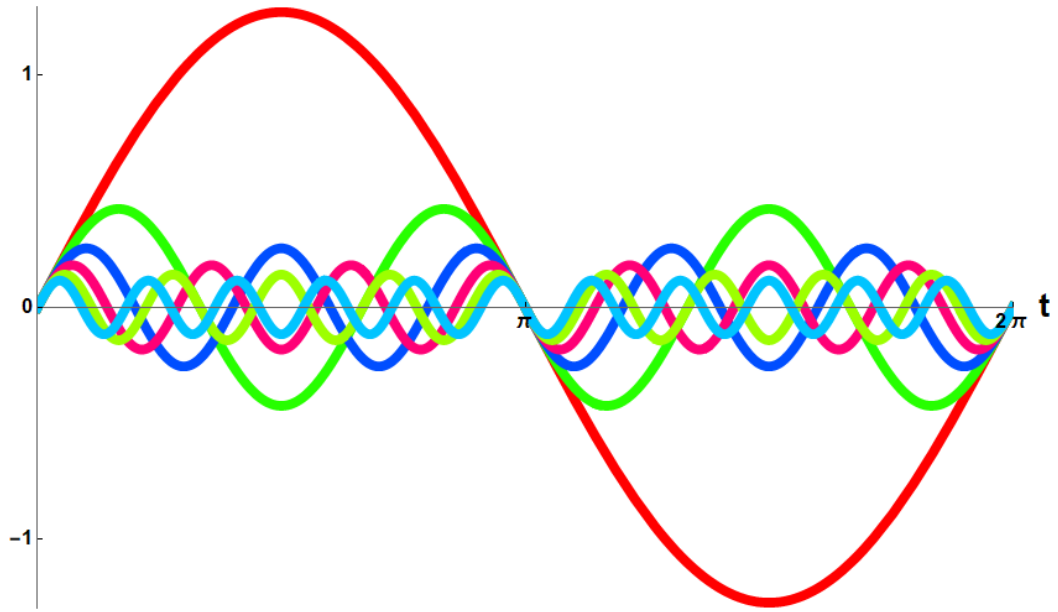
Approximationen



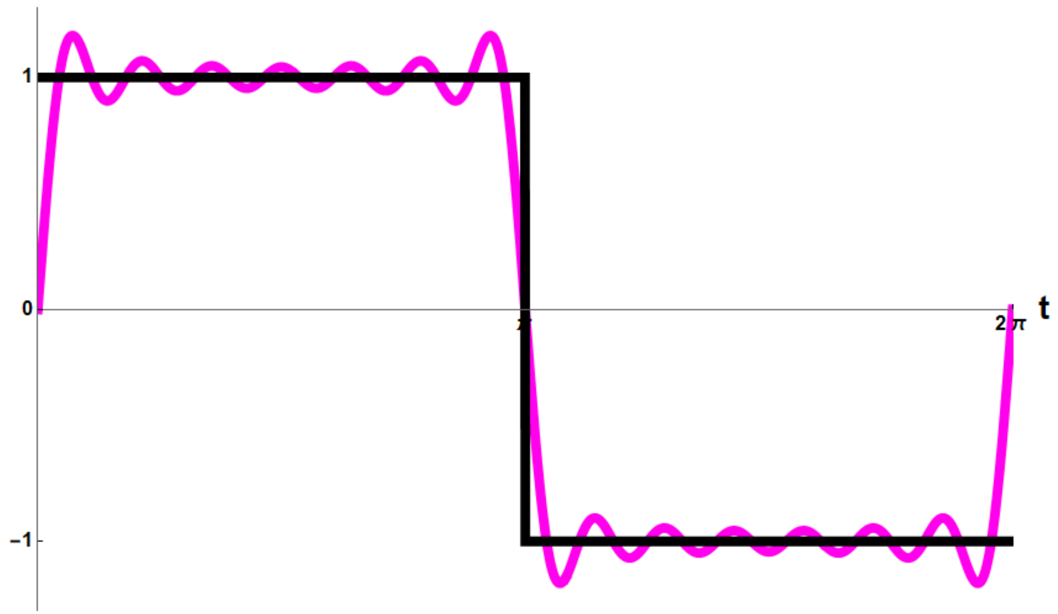
Spektrum



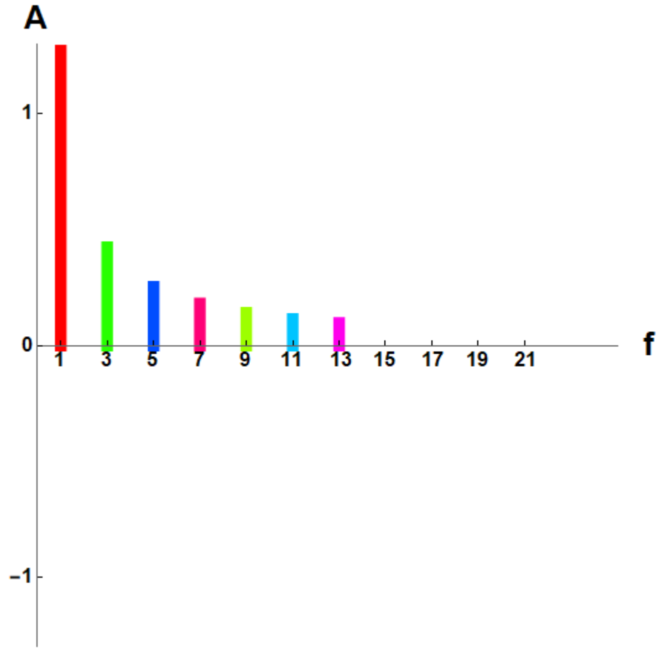
Summanden der Fourierreihe



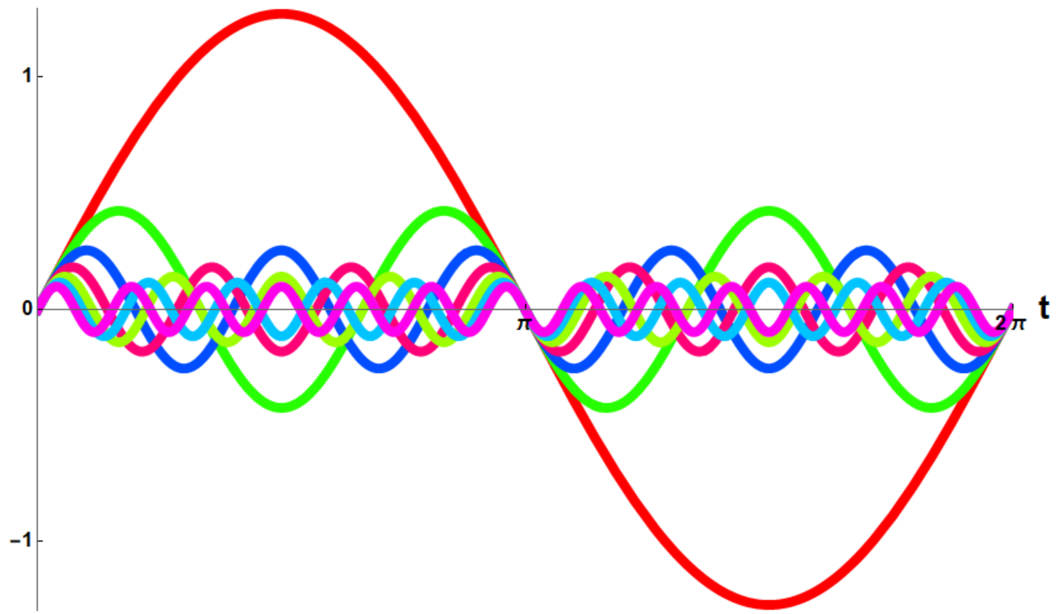
Approximationen



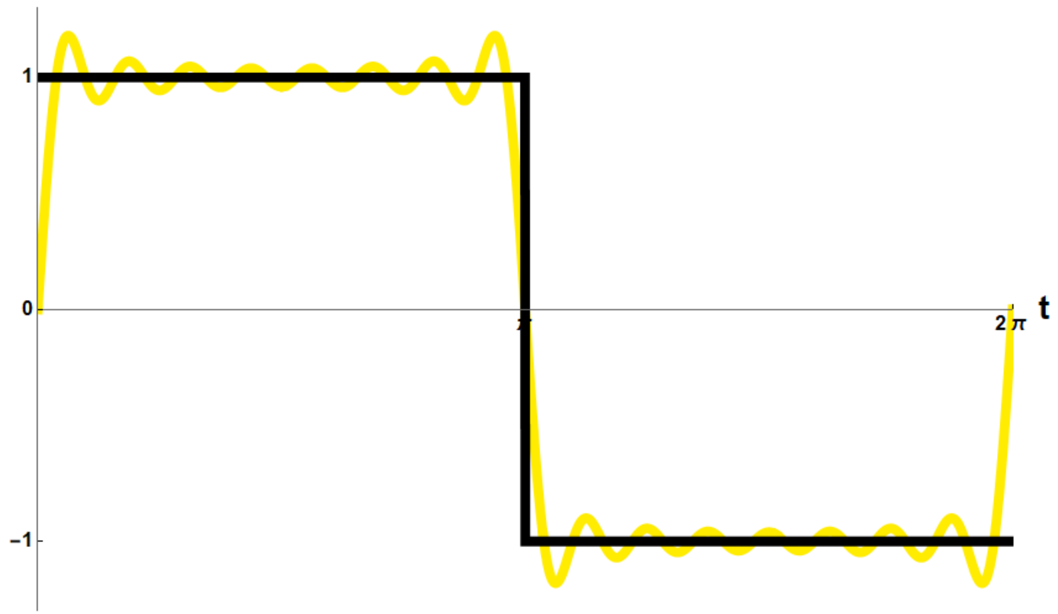
Spektrum



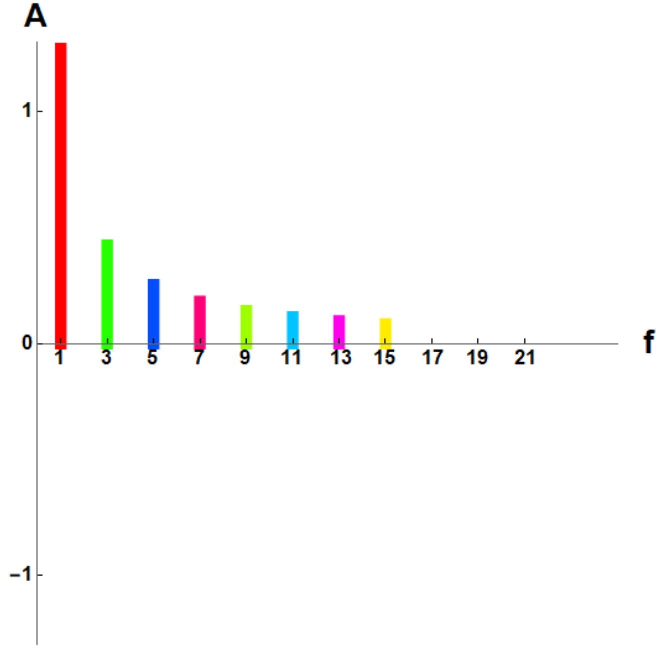
Summanden der Fourierreihe



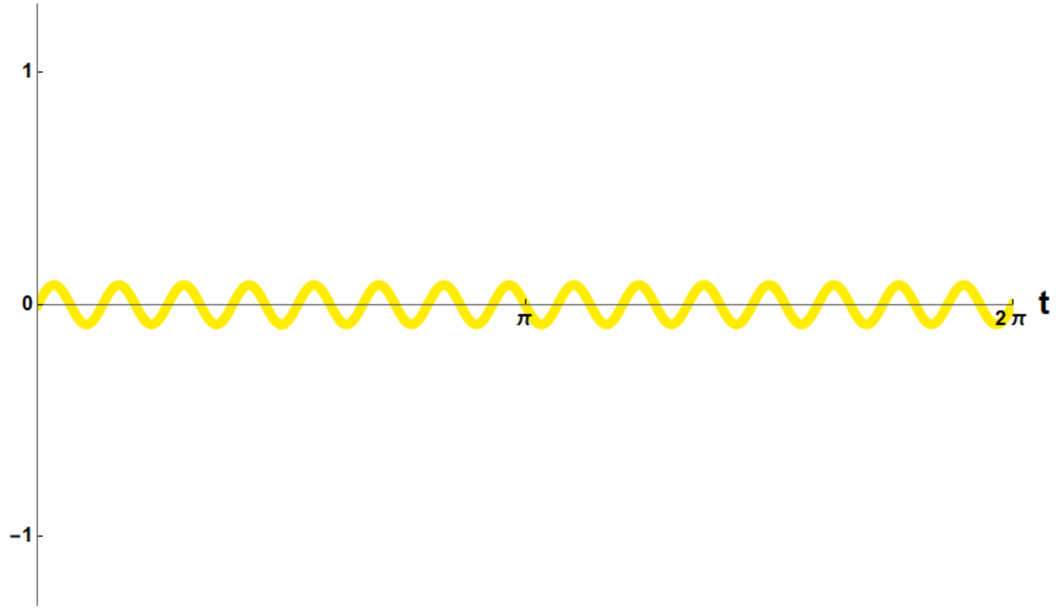
Approximationen



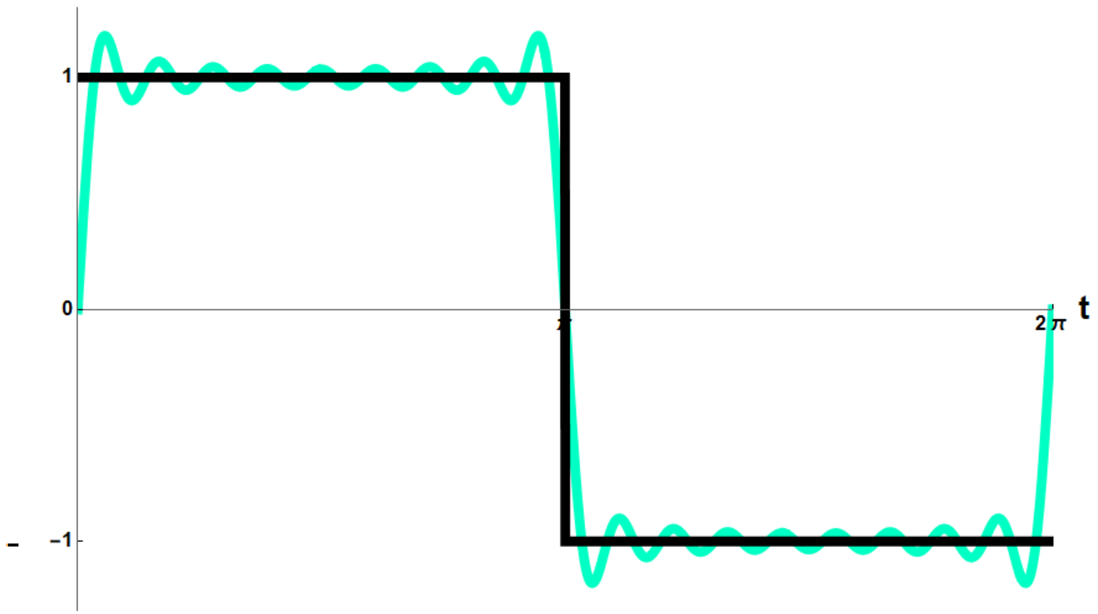
Spektrum



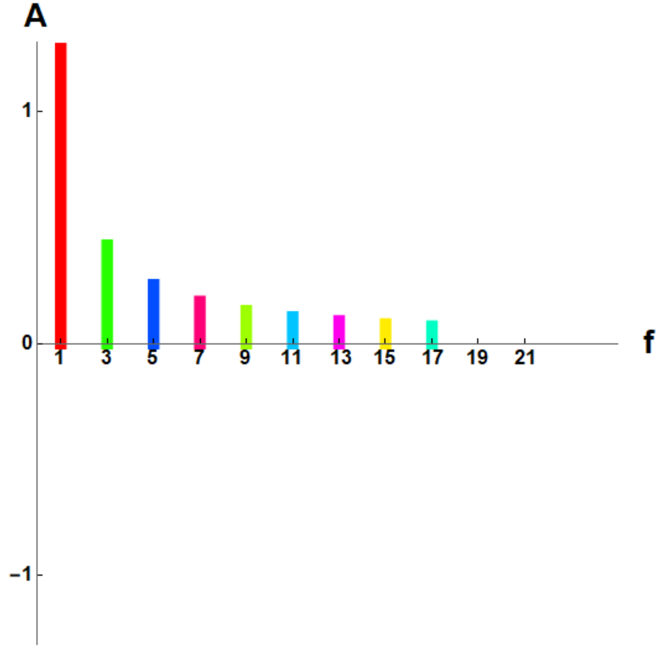
Summanden der Fourierreihe



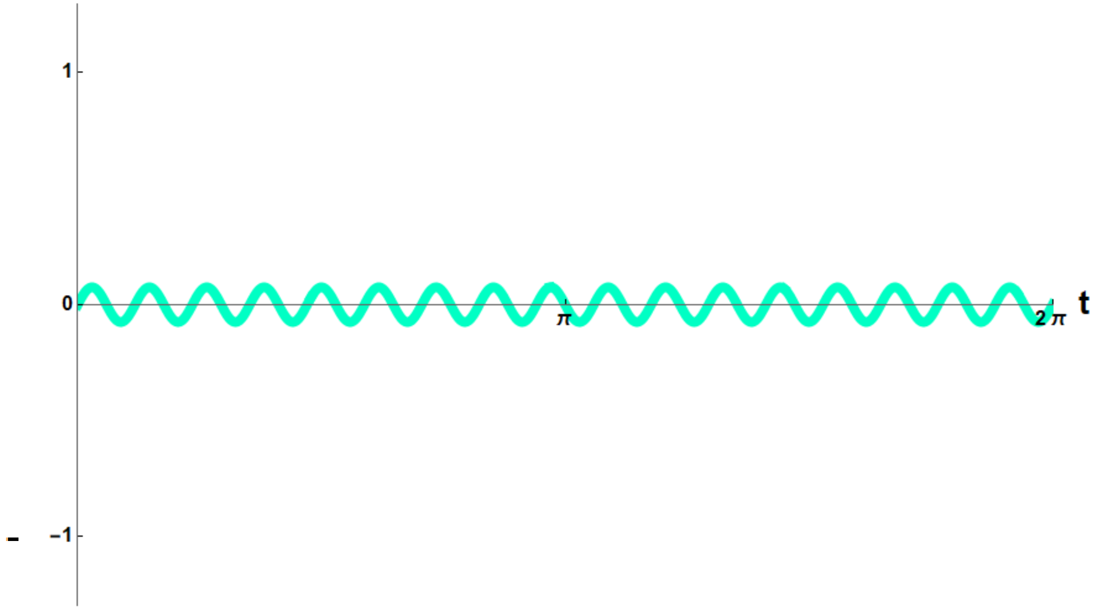
Approximationen



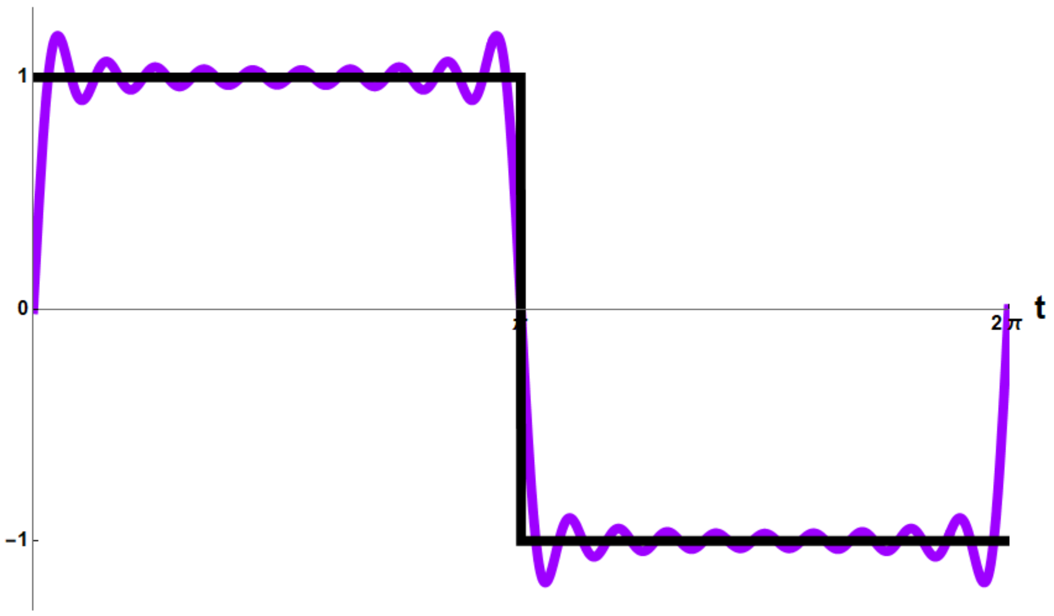
Spektrum



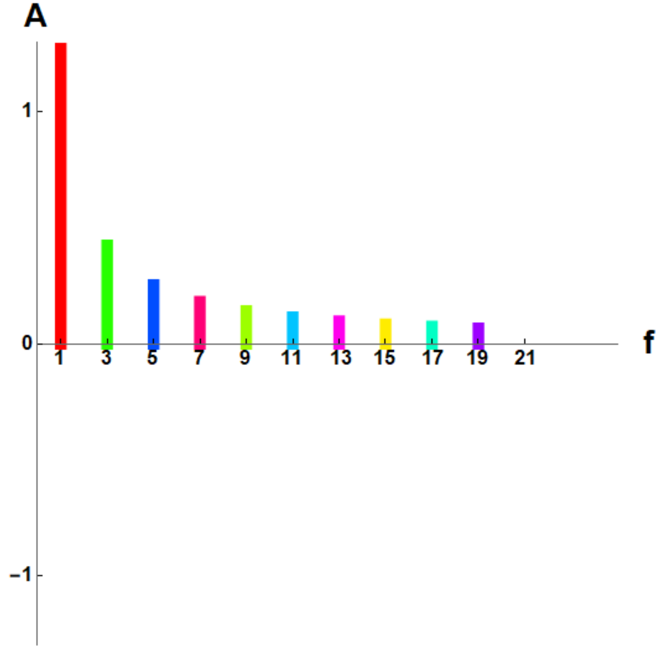
Summanden der Fourierreihe



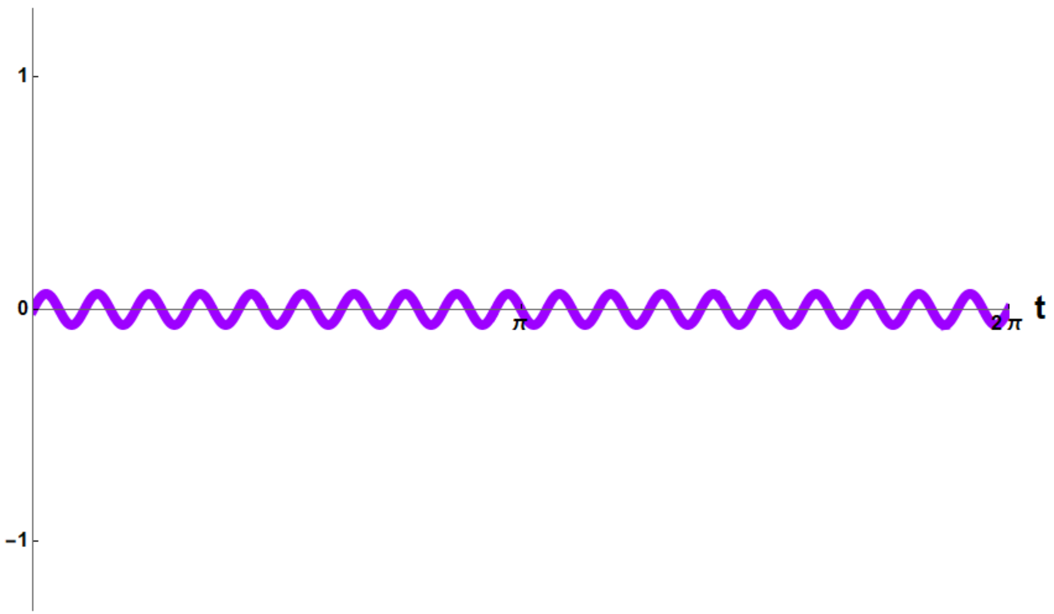
Approximationen



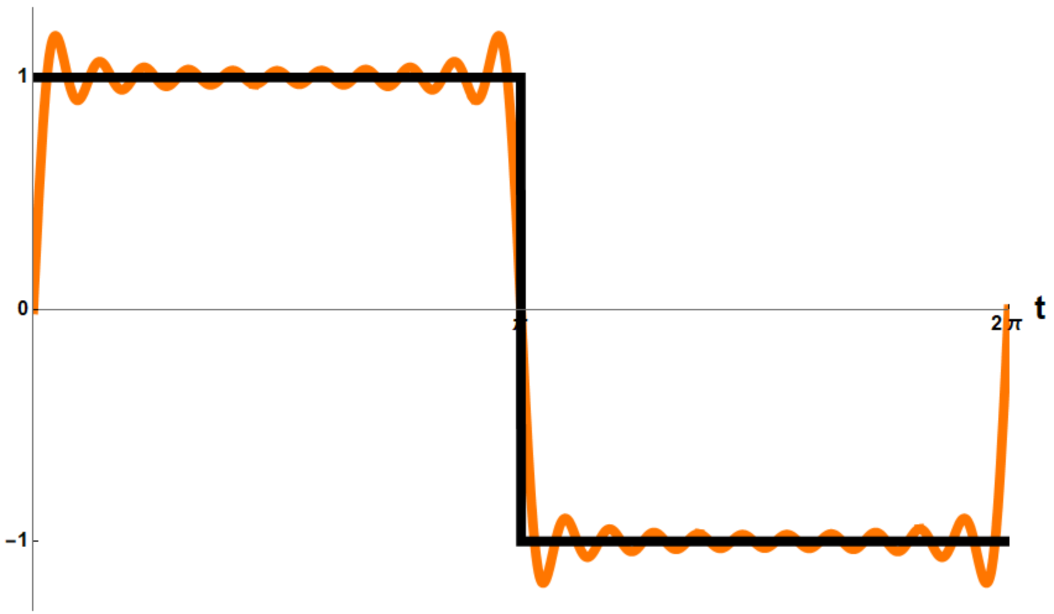
Spektrum



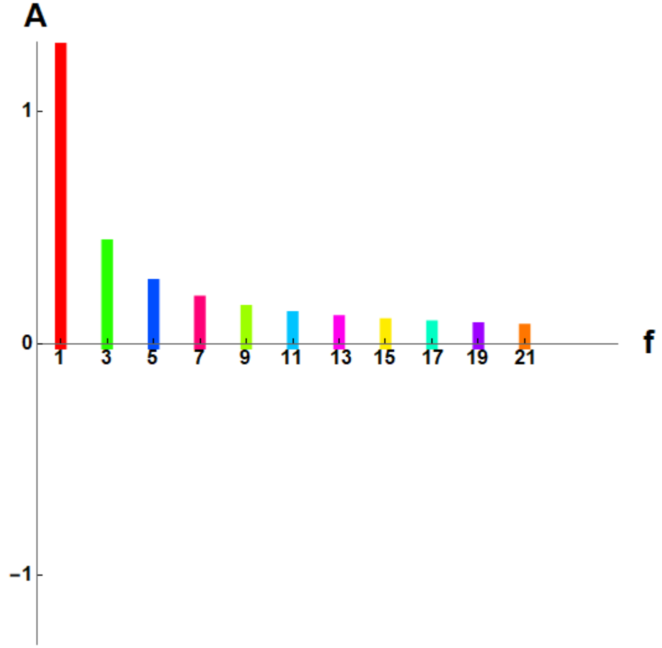
Summanden der Fourierreihe



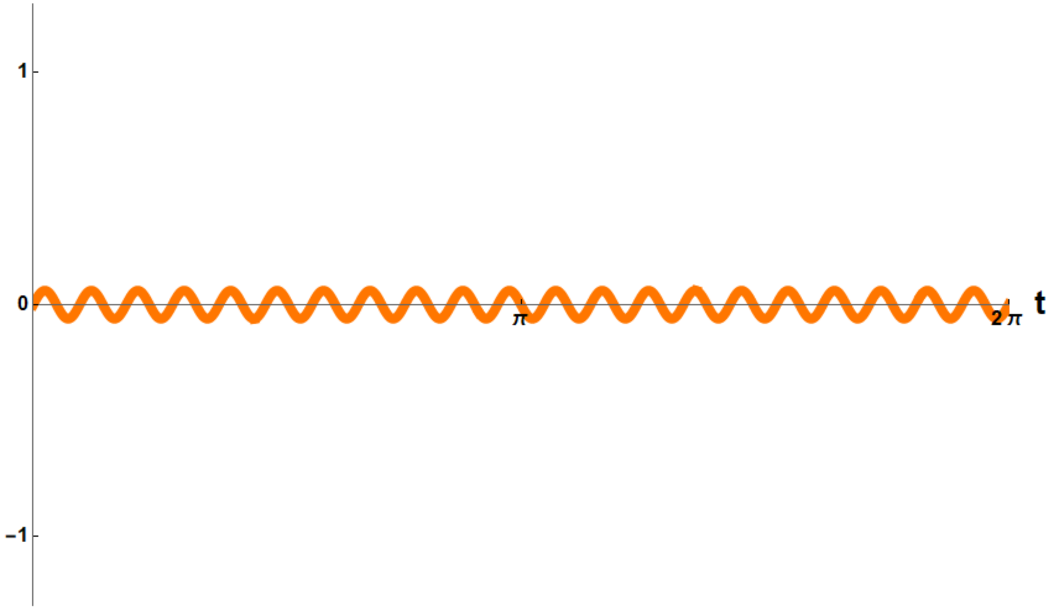
Approximationen



Spektrum



Summanden der Fourierreihe



Im Spektrumsverlauf, über der Frequenz aufgetragen, lässt sich auch das Konvergenzverhalten der F.-Reihe erkennen.

Allgemein gilt, wenn man Kosinus und Sinuskomponenten hat: das

Amplitudenspektrum (reelles Spektrum) $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$

lässt sich berechnen aus den Koeffizienten der Fourierreihe a_k und b_k :

$$\boxed{A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \qquad (k \in N)$$

$$\boxed{A_0 = \frac{a_0}{2}}$$

Die Phasenlage der einzelnen Sinusfunktionen, heisst das

Phasenspektrum *(reelles Spektrum)* $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Dies lässt sich berechnen aus den Koeffizienten der Fourierreihe a_k *und* b_k *:*

$$\varphi_k = -\arctan(\frac{b_k}{a_k}) , \qquad (k \in N)$$