Differentialgleichungen 4. Teil

Aufsuchen einer partikulären Lösung

Inhomogene Lineare DGL 1. Ordnung

Dies sind DGL vom Typ

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x),$$

g heißt ***Störfunktion*** oder ***Inhomogenität.***

Es gibt prinzipiell zwei Lösungsmethoden:

1. Methode: Lösung durch „***Variation der Konstanten***“.

2. Methode: Lösung durch „***Aufsuchen einer partikulären Lösung*** y_p“.

2. Methode: Lösung durch „***Aufsuchen einer partikulären Lösung*** y_p“.

In diesem speziellen Fall nur mit einer linearen inhomogenen Differentialgleichung mit **konstanten** Koeffizienten

$$y'(x) + ay(x) = g(x) \;\;,\;\; a \in \mathbb{R}$$

Auch hier erfolgt dies in 2 Schritten:

1.Schritt: Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y'(x) + a\,y(x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y_h(x) = ce^{-ax} \;\;, \text{für } c \in \mathbb{R}\,.$$

2.Schritt: ***„Aufsuchen einer partikulären Lösung y_p“.***

Ansatz: (Kochrezept!) Wir nehmen an, es gibt eine Lösung y_p der DGL mit der „allgemeinen Form vom Typ der Inhomogenität $g(x)$“.

$$y_p(x) \underset{vom\ gleichen\ Typ}{\approx} g(x)$$

Dann ergibt sich die allgemeine Lösung der DGL mit **:**

$$y = y_h + y_p$$

Was bedeutet vom gleichen Typ? Hier eine Tabelle:

Inhomogenität	Ansatz
$g(x)$	$y_p(x)$
sin(ωx)	A cos(ωx) + B sin(ωx)
sin(ωx)	A sin ($\omega x + \ \varphi$)
$\cos(\omega \mathrm{x})$	A cos(ωx) + B sin(ωx)
x^n	$a_0 + a_1 x + a_2\, x^2 + .. + a_n x^n$
$e^{\alpha x}$	$a\ e^{\alpha x}$

Die unbekannte Konstanten A, B,φ, a_0 , a_1 … usw., müssen durch Einsetzen in die DGL berechnet werden.

Es gilt:

1. Die Menge

$$L_h = \{y_h \mid y_h'(x) + a\, y_h\,(x) = 0\}$$

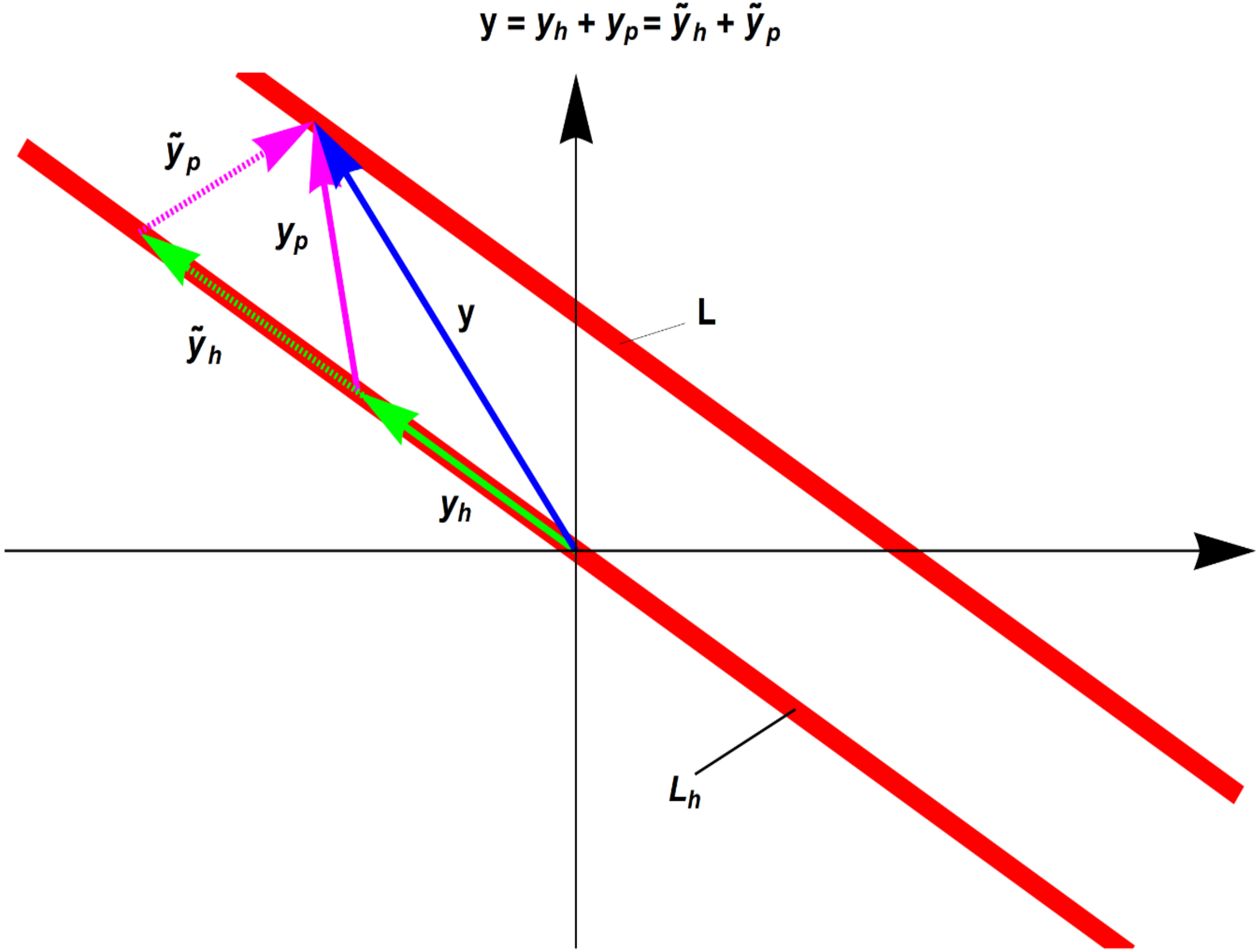
aller Lösungen der homogenen DGL bildet einen ***eindimensionalen Vektorraum.***

2. Wenn man eine partikuläre Lösung y_p der (inhomogenen) DGL gefunden hat, dann sind alle y der Form

$$y = y_h + y_p \;,\; y_h \in L_h$$

Lösungen der DGL. Also ist die Menge aller Lösungen der DGL

$$L = \{y \mid y = y_h + y_p \;, y_h \in L_h\}.$$



Grafische Darstellung der Lösungsmengen L und L_h der DGL y'+ a y = g

Beispiel 13.8: $y'(x) + 2y(x) = \cos(x)$.

1.Schritt: Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung:

$$y_h = ce^{-2x} \quad \text{für } c \in \mathbb{R}\,.$$

2.Schritt: Lösung der inhomogenen DGL durch

„Aufsuchen einer partikulären Lösung y_p“:

Wegen g(x) = cos(x) machen wir den **Ansatz:**

Wir nehmen an, die Lösung y_p der DGL hat die Form (s.Tabelle)

$\boldsymbol{y_p}$ **(x) = A cos(x) + B sin(x),** A und B sind gesucht!

Einsetzen von y_p = A cos(x) + B sin(x)

in die DGL $y'(x) + 2y(x) = \cos(x)$:

Mit y'_p (x) = - A sin(x) + B cos(x)

Ergibt sich

(-A + 2B) sin(x) + (B + 2A) cos(x) = cos(x) .

Koeffizientenvergleich ergibt das LGS

(-A +2 B) = 0

(2 A + B) = 1

mit der Lösung

$$A = \frac{2}{5} \quad \text{und } B = \frac{1}{5}$$

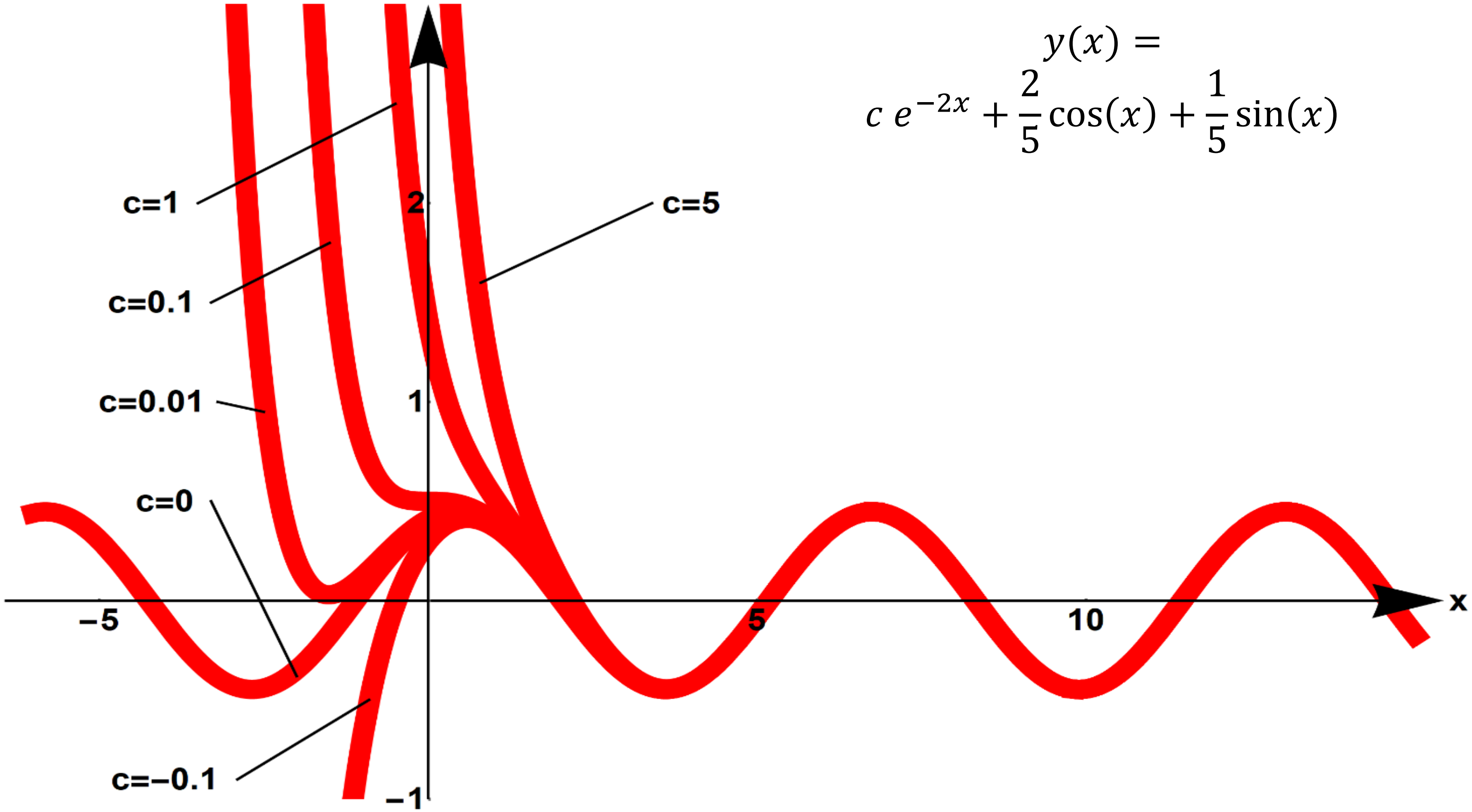
Damit hat man die partikuläre Lösung y_p

$$y_p\,(x) = \frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x)\ .$$

Somit folgt, die allgemeine Lösung der DGL ist

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) =$$

$$c\,e^{-2x} + \frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x)\ ,\text{für } c \in \mathbb{R}\,.\ \text{Probe machen!}\,.$$



$$y(x) = c\,e^{-2x} + \frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x)$$

Allgemeine Lösung der DGL für verschiedene $c_0 \in \mathbb{R}$