

Matrizen und Determinanten II

Wiederholung:

Matrizen sind Zahlenschemata, die als Koeffizienten bei linearen Gleichungssystemen das System bestimmen. Gleichartige Matrizen bilden Vektorräume. Matrizen können auch miteinander multipliziert werden.

Determinanten sind „Kennzahlen“ quadratischer Matrizen. Sie dienen als Kriterien dafür, ob eine Matrix invertierbar ist oder nicht und sind damit von großer Wichtigkeit beim Lösungsverhalten von linearen Gleichungssystemen.

11.4 Einheitsmatrix und inverse Matrix

Betrachte die (n,n) -Matrix \mathbf{E} (die in der Diagonalen Einsen hat und sonst *Nullen*):

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese heißt *Einheitsmatrix*

Eine Kurzschreibweise für \mathbf{E} ist $\mathbf{E} = (\delta_{ij})$.

Es gilt dann für eine beliebige (n,n) -Matrix \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(1) $\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{A}$ (\mathbf{E} ist vertauschbar mit allen \mathbf{A})

(2) Wenn eine (n,n) -Matrix \mathbf{B} existiert mit der Eigenschaft

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E},$$

dann heißt \mathbf{B} die *inverse Matrix* von \mathbf{A} mit der Schreibweise

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Definition 11.4:

Eine Matrix \mathbf{A} heißt *regulär*, wenn gilt $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Sie heißt *singulär*, wenn gilt $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Bemerkung 11.4:

(1) Ein lineares Gleichungssystem (LGS) der Form (s. Bemerkung 11.2)

$$\mathbf{A} \vec{x} = \vec{c}$$

hat genau dann **nur eine** Lösung, wenn gilt $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

(2) Wenn $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, genau dann existiert \mathbf{A}^{-1} und es gilt

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{c}.$$

Dies ist aber kein effektives Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme, da die Berechnung der inversen Matrix \mathbf{A}^{-1} aufwendiger ist als die klassischen Lösungsverfahren (s. Kap.12).

(2) Wenn $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, genau dann existiert \mathbf{A}^{-1} und es gilt

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{c}.$$

Dies ist aber kein effektives Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme, da die Berechnung der inversen Matrix \mathbf{A}^{-1} aufwendiger ist als die klassischen Lösungsverfahren (s. Kap.12).

(3) Wenn das LGS homogen ist, d.h. $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ und $\det(\mathbf{A}) = 0$, dann gibt es außer der trivialen Lösung $\vec{x} = \vec{0}$ noch unendlich viele weitere Lösungen.

(2) Wenn $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, genau dann existiert \mathbf{A}^{-1} und es gilt

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{c}.$$

Dies ist aber kein effektives Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme, da die Berechnung der inversen Matrix \mathbf{A}^{-1} aufwendiger ist als die klassischen Lösungsverfahren (s. Kap.12).

(3) Wenn das LGS homogen ist, d.h. $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ und $\det(\mathbf{A}) = 0$, genau dann gibt es außer der trivialen Lösung $\vec{x} = \vec{0}$ noch unendlich viele weitere Lösungen.

(4) Wenn das LGS homogen ist, d.h. $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$, jedoch $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, dann gibt es genau eine Lösung und dies ist die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$

Definition 11.5:

Sei $\mathbf{A} = (a_{ik})$ eine reell wertige Matrix. Dann heißt \mathbf{A} *symmetrisch* wenn gilt

$$(a_{ik}) = (a_{ki}) .$$

Das bedeutet, die Matrix \mathbf{A} ist spiegelsymmetrisch zur (Haupt) - Diagonalen.

Man schreibt dann

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T ,$$

wobei \mathbf{A}^T die an der Diagonalen gespiegelte Matrix von \mathbf{A} ist.

Beispiel 11.2:

Die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{ist symmetrisch.}$$

11.5 Matrizen als lineare Abbildungen

Sei \mathbf{A} eine (n,n) -Matrix . Dann gibt es eine lineare Abbildung \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^n :

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{y} \text{ mit } \vec{x} \in \mathbb{R}^n .$$

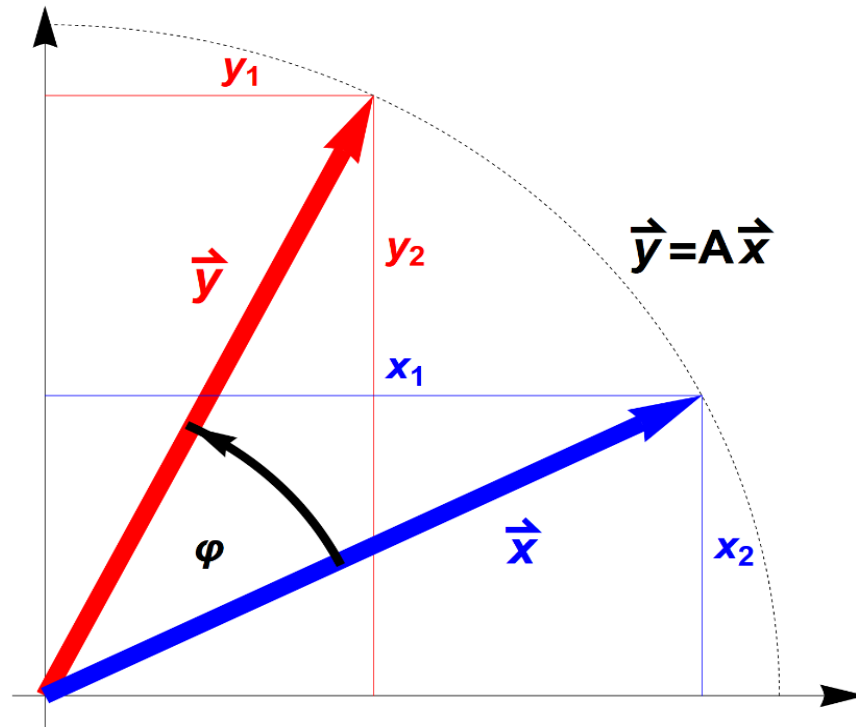
Das heißt, \mathbf{A} definiert eine lineare Transformation in \mathbb{R}^n (eine Drehung, Spiegelung oder Streckung)

Beispiel 11.3:

Die Transformation

$$\vec{y} = \mathbf{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Beschreibt eine Drehung des Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ um den Winkel φ (s. Abb.).



Drehung des Vektors \vec{x} im \mathbb{R}^2 . Im Video LINK dreht sich der Vektor \vec{x} .

<http://sn.pub/zvvYST>



Beispiel 11.4:

Die Transformation

$$\vec{y} = \mathbf{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Beschreibt eine Streckung oder Stauchung des Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ um den Faktor λ .

11.6 Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix

Wenn für eine symmetrische (n,n) -Matrix \mathbf{A} Werte $\lambda \in \mathbb{R}$. und Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ existieren \mathbb{R}^n , so dass die sogenannte *Eigenwertgleichung* gilt,

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda \vec{x}$$

gilt, dann heißt λ *Eigenwert* und \vec{x} *Eigenvektor* von \mathbf{A} .

Die Eigenwertgleichung ist offenbar äquivalent mit dem homogenen LGS

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\vec{x} = \vec{0}.$$

Beispiel 11.5:

Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind Eigenwerte und Eigenvektoren, das heißt Werte λ und Vektoren \vec{x} , so dass gilt

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \vec{x} = \vec{0}.$$

Das ist ein homogenes LGS und hat somit die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.

Wir suchen aber Vektoren $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Das ist nur möglich wenn gilt $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$.

also gilt

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det\begin{pmatrix} -2 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

und somit

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det\begin{pmatrix} -2 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = -6 + \lambda + \lambda^2 = 0.$$

Aus der Lösung der Gleichung

$$-6 + \lambda + \lambda^2 = 0$$

folgt $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -3$. Dies sind die *Eigenwerte* von \mathbf{A} .

Die Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren \vec{x} und \vec{y} erfolgt durch Einsetzen der Eigenwerte in die Eigenwertgleichung:

Dann ist die Eigenwertgleichung für $\lambda=2$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist ein homogenes LGS mit **mehr** als einer Lösung.

nämlich:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}$$

Und für den Eigenwert $\lambda = -3$:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist das Ergebnis:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}$$

Wir haben also die Lösungsscharen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}$$

und

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}$$

Dann sind

$$\vec{x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die **normierten** Eigenvektoren von **A**.

Weiterhin gilt

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Also sind \vec{x} und \vec{y} orthogonal

Somit ist $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ ein ONB in \mathbb{R}^2 .

Die Matrix aus die den beiden Eigenvektoren gebildet wird:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar. Es gibt also ein \mathbf{S}^{-1} , nämlich

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

mit

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt der **Satz** :

Die Transformation \mathbf{SAS}^{-1} transformiert die Matrix \mathbf{A} in eine

Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -3$ in der Diagonalen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{SAS}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine allgemeine Eigenschaft von symmetrischen Matrizen.

Definition:

Wenn für eine symmetrische (n,n) -Matrix \mathbf{A} Werte $\lambda \in \mathbb{R}$. und Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ existieren \mathbb{R}^n , so dass die sogenannte *Eigenwertgleichung* gilt,

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda \vec{x}$$

gilt, dann heißt λ *Eigenwert* und \vec{x} *Eigenvektor* von \mathbf{A} .

Die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren erfolgt in mehreren Schritten

1.Schritt:Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren:

Die Eigenwertgleichung ist offenbar äquivalent mit dem homogenen LGS

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \vec{x} = \vec{0} .$$

Wenn dieses LGS nichttriviale Lösungen $\vec{x} \neq \vec{0}$ hat, dann gilt:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0.$$

Die Berechnung der Determinante ergibt einen Ausdruck vom Typ:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda E) = \sum_{j=1}^n c_j \lambda^j$$

Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren:

Die Eigenwertgleichung ist offenbar äquivalent mit dem homogenen LGS

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\vec{x} = \vec{0}.$$

Wenn dieses LGS nichttriviale Lösungen $\vec{x} \neq \vec{0}$ hat, dann gilt:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0.$$

Die Berechnung der Determinante ergibt einen Ausdruck vom Typ:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \sum_{j=1}^n c_j \lambda^j = 0$$

Dies ist ein Polynom n-ten Grades in der Variablen λ :

$$\sum_{j=1}^n c_j \lambda^j .$$

und heißt *Charakteristisches Polynom* von **A**.

Und wir haben somit eine Gleichung n-ten Grades

$$\sum_{j=1}^n c_j \lambda^j = 0$$

Die n Lösungen λ_j (= Nullstellen des Polynoms) sind dann die *Eigenwerte* von **A**

Und die zugehörigen *Eigenvektoren* \vec{x}_j erhält man, indem man die nichttrivialen Lösungen \vec{x}_j des homogenen LGS

$$(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}) \vec{x}_j = \vec{0}, \text{ für } j = 1, 2, \dots, n$$

zum Eigenwert λ_j von \mathbf{A} berechnet.

Hier bekommt man wegen

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$$

∞ viele, dh. eine Schar von Lösungen

Daraus kann man durch Dividieren durch den Betrag $|\vec{x}_j|$ von \vec{x}_j für jede Schar von Eigenvektoren einen normierten Eigenvektor berechnen.

Diese Eigenvektoren sind paarweise orthogonal und bilden somit eine Orthonormal Basis (ONB) in \mathbb{R}^n das heißt :

$$\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{für } i \neq j \\ \mathbf{1} & \text{für } i = j \end{cases}, \text{ für } i, j = 1, 2, \dots, n$$

(s. G. Bärwolff 2005, Höhere Mathematik... S. 339),

Dann gilt der Satz:

Satz 11.5:

Für eine symmetrische (2,2)-Matrix \mathbf{A} mit den Eigenwerten λ_1 und λ_2 gibt es Matrizen \mathbf{S} und \mathbf{S}^{-1} , gebildet aus den (orthogonalen) Eigenvektoren von \mathbf{A} so, dass die „*Hauptachsentransformation*“ gilt:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{SAS}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

1. Der Begriff Hauptachsentransformation kommt aus der Geometrie wo „Kegelschnitte“ (z.B. Ellipsen) in beliebiger Lage auf eine Darstellung in „Hauptachsen“ transformiert werden (s. R. Wüst: Höhere Mathematik für Physiker, S. 537).
2. Eigenwerte und Eigenvektoren spielen auch in der Physik eine Rolle z.B. bei gekoppelten Pendeln (s. L. Papula, Mathematik..., Bnd. 2, S. 144)