Integralrechnung im Mehrdimensionalen

3. Teil

Röhrenansatz und Cavalieri

„Röhrenansatz“

Bei rotationssymmetrischen Körpern gibt es eine Variante der Dreifachintegration mit Zylinderkoordinaten, die die Volumenberechnung auf ein einfaches Integral reduziert.

Betrachte einen Körper mit den Grenzen

$$(\mathrm{V}) = \begin{pmatrix} z_u(r) \leq z(r) \leq z_o(r) \\ r_i \leq r \leq r_a \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$V = \iiint_V 1 \; dv = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \Big(\int_{r=r_i}^{r=r_a} \Big(\int_{z_u(r)}^{z_o(r)} r \, dz\Big) dr\Big) d\varphi.$$

Wegen der Rotationssymmetrie gilt:

$$V = 2\pi \int_{r=r_i}^{r=r_a} \Big(\int_{z_u(r)}^{z_o(r)} r \, dz\Big) dr = \int_{r=r_i}^{r=r_a} 2\pi \, r \; \underbrace{(\boldsymbol{z_o}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{z_u}(\boldsymbol{r}))}_{h(r)} dr$$

Mit der „Höhe“

$$h(r) = \left(z_o(r) - z_u(r)\right)$$

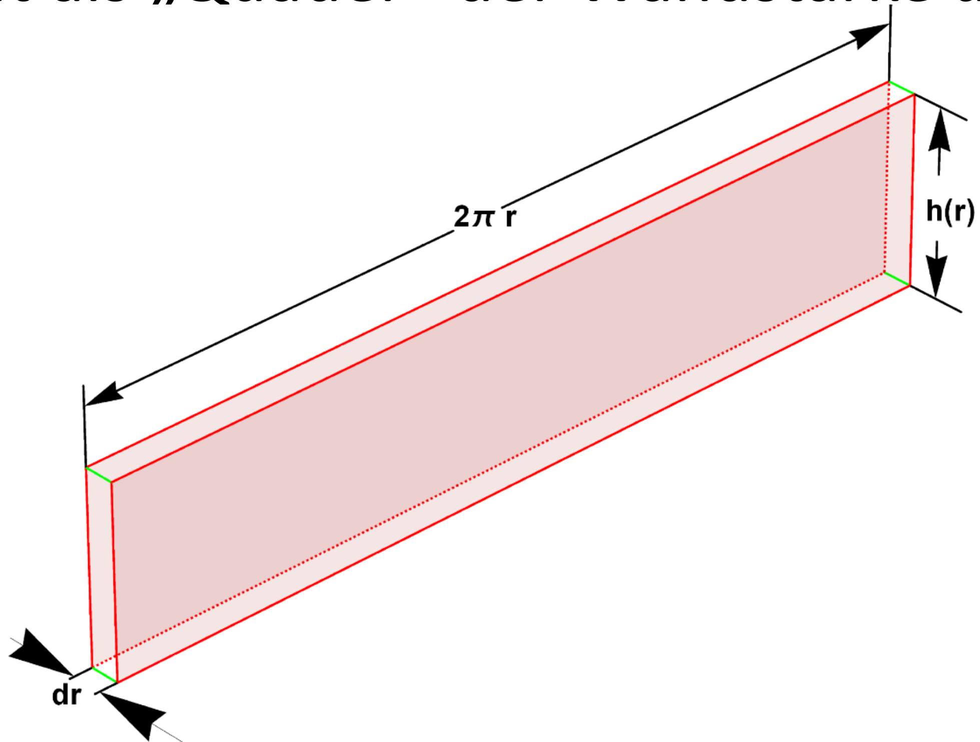
Und der „Wanddicke“ dr

wird der Körper „zerlegt“ in konzentrische Röhren mit der Wanddicke dr und der Höhe $h(r)$. Und wir erhalten das einfache Integral

$$V = \int_{r=r_i}^{r=r_a} 2\pi r \, h(r) \, dr$$

Das Volumen berechnet sich also durch „Aufaddieren“ (und Grenzwertbildung) der Volumina $dv = 2\pi r\, h(r)\, dr$, d.h. von konzentrischen Röhren mit dem Umfang $2\pi r$, der Wandstärke dr und der Höhe
$$h(r) = z_o(r) - z_u(r).$$

Die Röhre, abgerollt als „Quader“ der Wandstärke *dr* hat die Form:



Beispiel 17.12:

Berechne das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Funktion

$$z = f(x) = \cos(x) \quad \text{mit } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{und} \quad 0 \leq z \leq \cos(x)$$

um die z-Achse entsteht. Also setzen wir $x \rightarrow r$ und damit $\cos(x) \rightarrow \cos(r)$.

Die Grenzen des Körpers sind dann

$$(V) = \begin{pmatrix} 0 \leq z(r) \leq \cos(r) \\ 0 \leq r \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{pmatrix}$$

Dann ist das Volumen des Körpers

$$V = \iiint_V 1 \; dv = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=\frac{\pi}{2}} \left(\int_{z(r)=0}^{\cos(r)} r\,dz \right) dr \right) d\varphi = 2\pi \int_{r=0}^{r=\frac{\pi}{2}} r\cos(r)\,dr$$

Mit Hilfe des Röhrenansatzes reduziert sich die Rechnung auf die einfache Integration

$$V = \int_{r=0}^{r=\frac{\pi}{2}} 2\pi\, r\cos(r)\,dr = \pi(\pi-2) = 3{,}586$$

Andere Interpretation:

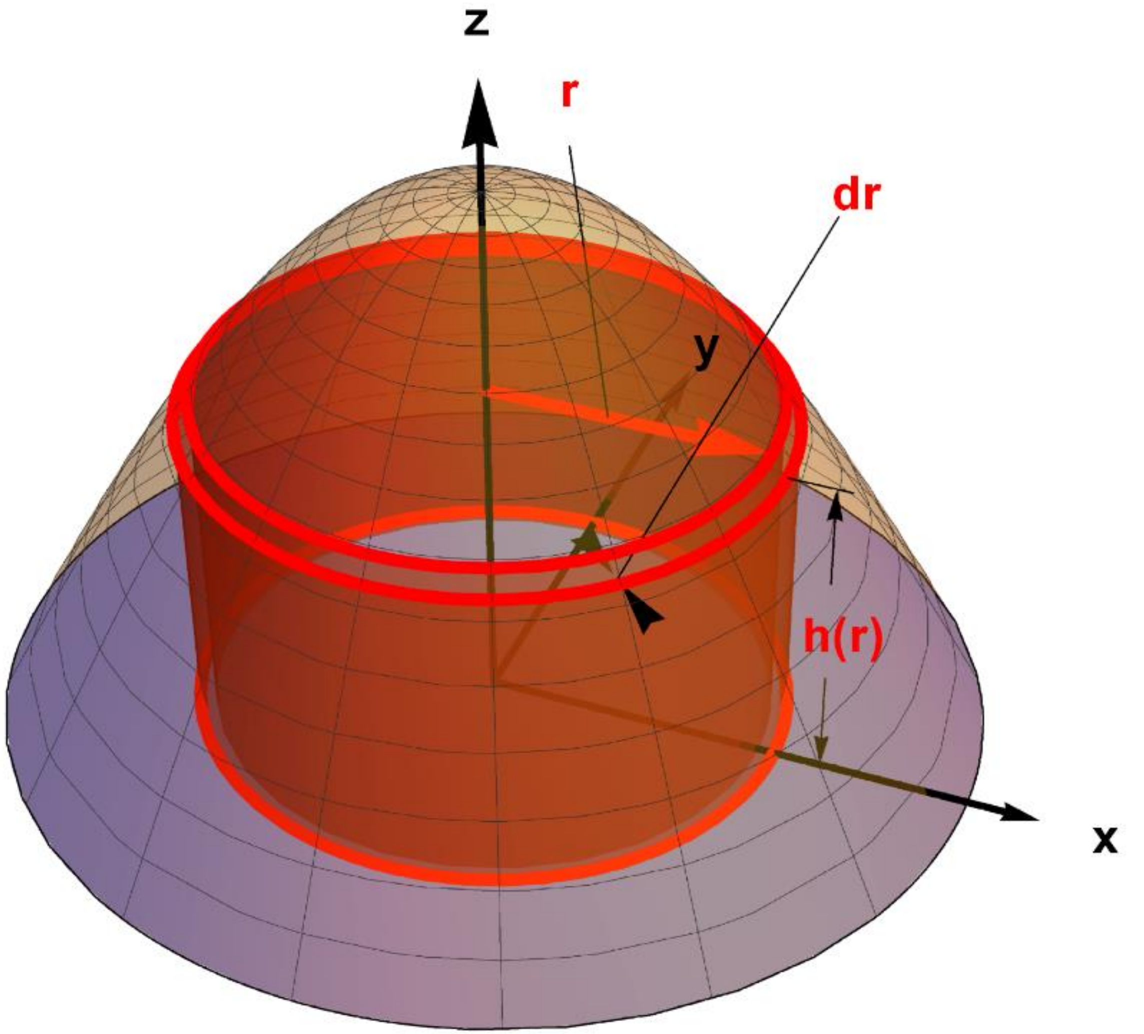
Mit der „Höhe“

$$h(r) = \left(z_o(r) - z_u(r)\right) = \cos(r)$$

Und der „Wanddicke“ dr

wird der Körper „zerlegt“ in konzentrische Röhren mit der Wanddicke dr und der Höhe $h(r)$. Und wir erhalten das einfache Integral

$$V = \int_{r=0}^{r=\frac{\pi}{2}} 2\pi\, r \cos(r)\; dr = \pi(\pi - 2) = 3{,}586$$



Volumenberechnung eines Körpers, erzeugt durch Rotation von cos(x) mit „Röhrenansatz

http://sn.pub/IsxQga

Beispiel 17.13:

Berechne das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Funktion

$$z = f(x) = \sin(x) \quad \text{mit } x \,\epsilon [0, \pi] \quad \text{und} \quad 0 \leq z \leq \sin(x)$$

um die z-Achse entsteht. Also setzen wir $x \to r$ und damit $\sin(x) \to \sin(r)$.

Die Grenzen des Körpers sind dann

$$(V) = \begin{pmatrix} 0 \leq z(r) \leq \sin(r) \\ 0 \leq r \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{pmatrix}.$$

Dann ist das Volumen des Körpers

$$V = \iiint\limits_V 1 \; dv = \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int\limits_{r=0}^{r=\pi} \left(\int\limits_{z(r)=0}^{\sin(r)} r \, dz \right) dr \right) d\varphi = 2\pi \int\limits_{r=0}^{r=\frac{\pi}{2}} r \sin(r) \, dr$$

Mit Hilfe des Röhrenansatzes reduziert sich die Rechnung auf die einfache Integration

$$V = \int\limits_{r=0}^{r=\pi} 2\pi \, r \sin(r) \, dr = 2\pi^2 = 19{,}74$$

Andere Interpretation:

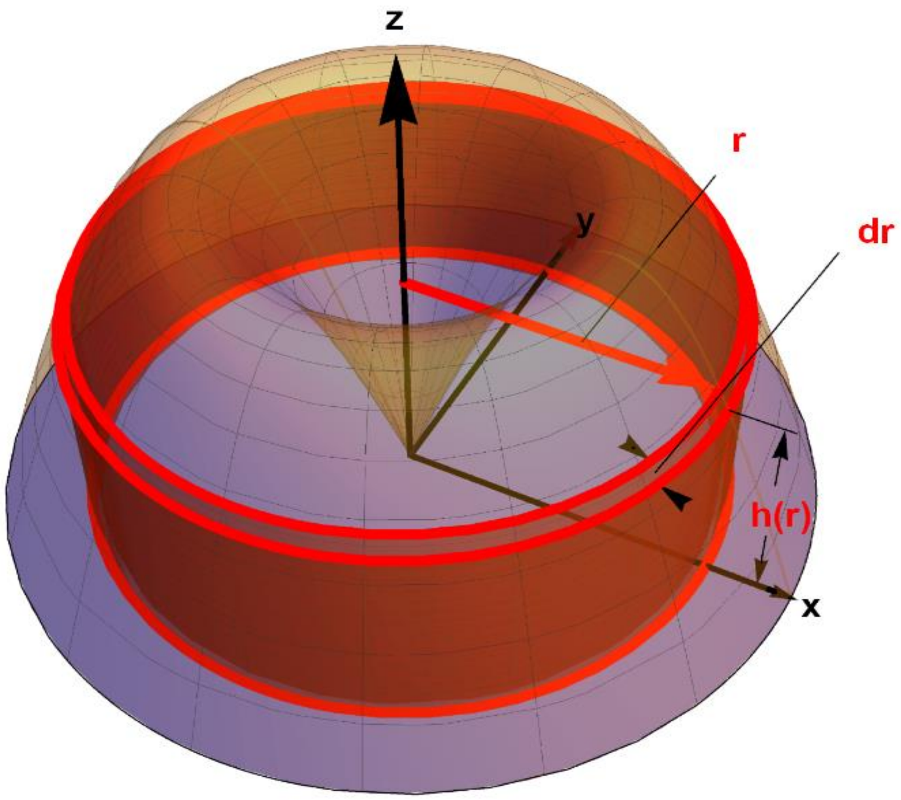
Mit der „Höhe“

$$h(r) = \left(z_o(r) - z_u(r)\right) = \sin(r)$$

Und der „Wanddicke“ dr

wird der Körper „zerlegt“ in konzentrische Röhren mit der Wanddicke dr und der Höhe $h(r)$. Und wir erhalten das einfache Integral

$$V = \int_{r=0}^{r=\pi} 2\pi\, r \sin(r)\, dr$$



Volumenberechnung eines Körpers, erzeugt durch Rotation von $\sin(x)$ mit „Röhrenansatz

http://sn.pub/nonaUv

Das Prinzip von Cavalieri

Durch Rotation einer Funktion $z = f(x)$ mit $x \epsilon [a, b]$um die *x*-Achse entsteht ein rotationssymmetrischer Körper.

Das Volumen berechnet sich durch „Aufaddieren“ und Grenzwertbildung von **Kreisscheiben *S*(*x*) =** $\pi\ f(x)^2$ mit den Radien $f(x)$

und den Volumina $dv = \pi\ f(x)^2\, dx$.
Das heißt

$$V = \int_{x=a}^{x=b} \pi\ f(x)^2\, dx$$

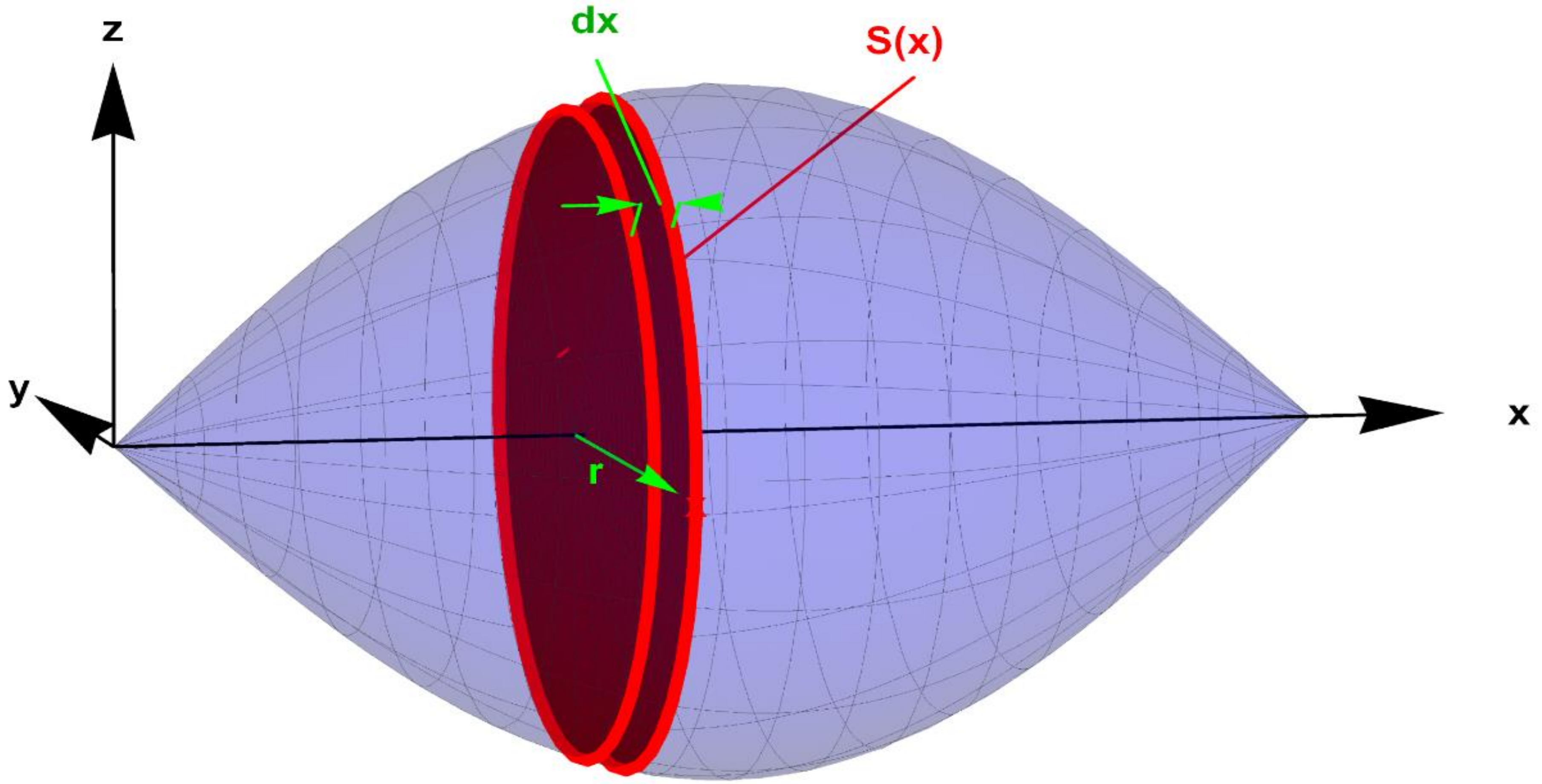
Beispiel 17.14:

Berechne das Volumen des Körpers, der

durch Rotation der Funktion $z = f(x) = \sin(x)$ mit $x \epsilon [0, \pi]$ um die *x*-Achse entsteht

Dann ist das Volumen:

$$V = \int_{x=0}^{x=\pi} S(x)dx = \int_{x=0}^{x=\pi} \pi\,(\sin(x))^2 dx = \frac{\pi^2}{2} = 4{,}935$$



http://sn.pub/EpH8wZ