Differentialgleichungen
2.Teil

13.2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

Differentialgleichungen, die neben der gesuchten Funktion nur Ableitungen erster Ordnung enthalten, heißen Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Wir besprechen hier nur einige einfach lösbare Typen von Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

Differentialgleichungen vom Typ

$$\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{x}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}),$$

für $g \neq 0$ gegeben, lassen sich Hilfe der Integralsubstitution lösen:
formale Argumentation (Merkregel):

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{f}(x)g(y) \xRightarrow[formal]{} \text{"}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{g(y)}} = \mathrm{f(x)dx}\text{"} \xRightarrow[\text{integrieren}]{} \int \frac{dy}{g(y)} = \int \mathrm{f}(x)dx$$

Berechne daraus y(x) ,falls existent.

Beispiel 13.3 $\boldsymbol{y'(x) = y(x)}$

Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{y} \quad \xRightarrow[formal]{} \quad \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y}} = 1\,\mathrm{dx} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int 1\,dx$$

Integration:

$$\ln|y| = x + k \text{ , für } k \in \mathbb{R} \Longrightarrow |y| = e^{x+k} = e^k e^x \Longrightarrow \mathrm{y} = \pm e^k e^x$$

$\Longrightarrow$ ***allgemeine Lösung:*** $\boldsymbol{y = ce^x}$, $\textbf{für } \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$

oder $L = \{y = ce^x \text{ für } c \in \mathbb{R}\}$

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Dies sind DGL vom Typ

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x),$$

für gegebenes $f(x)$ und $g(x),\ x \in \mathbb{R}$

g heißt ***Störfunktion*** oder ***Inhomogenität***

DGL heißt ***homogen,*** wenn $\mathrm{g(x)} = 0$ für alle x und ***inhomogen,*** wenn $\mathrm{g} \neq 0$ ist.

Homogene Lineare DGL 1. Ordnung

Dies sind DGL vom Typ

$$y'(x) + f(x)y(x) = 0,$$

Lösen durch Trennung der Variablen

$$\frac{dy}{dx} = -f(x)\, y \xRightarrow[\text{formal}]{} \text{"}\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y}} = -\,\mathrm{f(x)\ dx}\ \text{"} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx$$

Integration:

$$\ln|y| = -\int f(x)dx + k \text{ , für } k \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow |y| = e^{-\int \boldsymbol{f(x)dx+k}} = e^k e^{-\int \boldsymbol{f(x)dx}}$$

allgemeine Lösung: $\Rightarrow \quad \boldsymbol{y = ce^{-\int f(x)dx}}$, für $c \in \mathbb{R}$

Beispiel 13.3 $\quad \boldsymbol{y'(x) + x\,y(x) = 0}$

Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = -\mathrm{x\,y} \quad \xrightarrow[formal]{} \quad \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y}} = -\mathrm{x\ dx} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int x\,dx$$

Integration:

$$\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + k\,, \text{für } \; k \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad |y| = e^{-\frac{x^2}{2}+k} = e^k e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$\Longrightarrow$ ***allgemeine Lösung:*** $\quad \boldsymbol{y = ce^{-\frac{x^2}{2}}}, \;$ **für** $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$

Speziell für den Fall mit konstantem Koeffizienten

$$\boldsymbol{y'(x) + a\, y(x) = 0, \quad a \in \mathbb{R}}$$

ist die ***allgemeine Lösung:***

$$\boldsymbol{y = ce^{-ax}}, \quad \textbf{für } \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$$