6.2 Höhere Ableitungen

Die Ableitung $f'(x)$ einer differenzierbaren Funktion $f(x)$ ist eine Funktion, die unter bestimmten Bedingungen wiederum ableitbar ist. Durch weiteres Differenzieren gewinnt man die zweite (bzw. dritte bis n-te) Ableitung (falls sie existieren).

Schreibweisen:

Wenn $f(x) = y(x)$ genügend oft ableitbar ist (d.h. alle auftretenden Ableitungen existieren), schreiben wir:

$$y''(x) = f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\, y(x)$$

Entsprechend schreiben wir für die höheren Ableitungen:

$$y'''(x)\,, \qquad y^{(4)}\,(x), \qquad y^{(5)}\,(x), \dots, y^{(n)}\,(x)$$

Definition 6.2:
Analog zu (6.1) heißt dann

$$\frac{d^n}{dx^n}\,y(x)$$

Differentialquotient n-ter Ordnung.

Beispiel 10:(s. Abb. 6.3)

Sei

$$y(x) = \frac{x^4}{2} - 5\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\ ,$$

dann ist

$$y'(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$$

und

$$y''(x) = 6x^2 - 10x + 1$$

und

$$y'''(x) = 12x - 10.$$

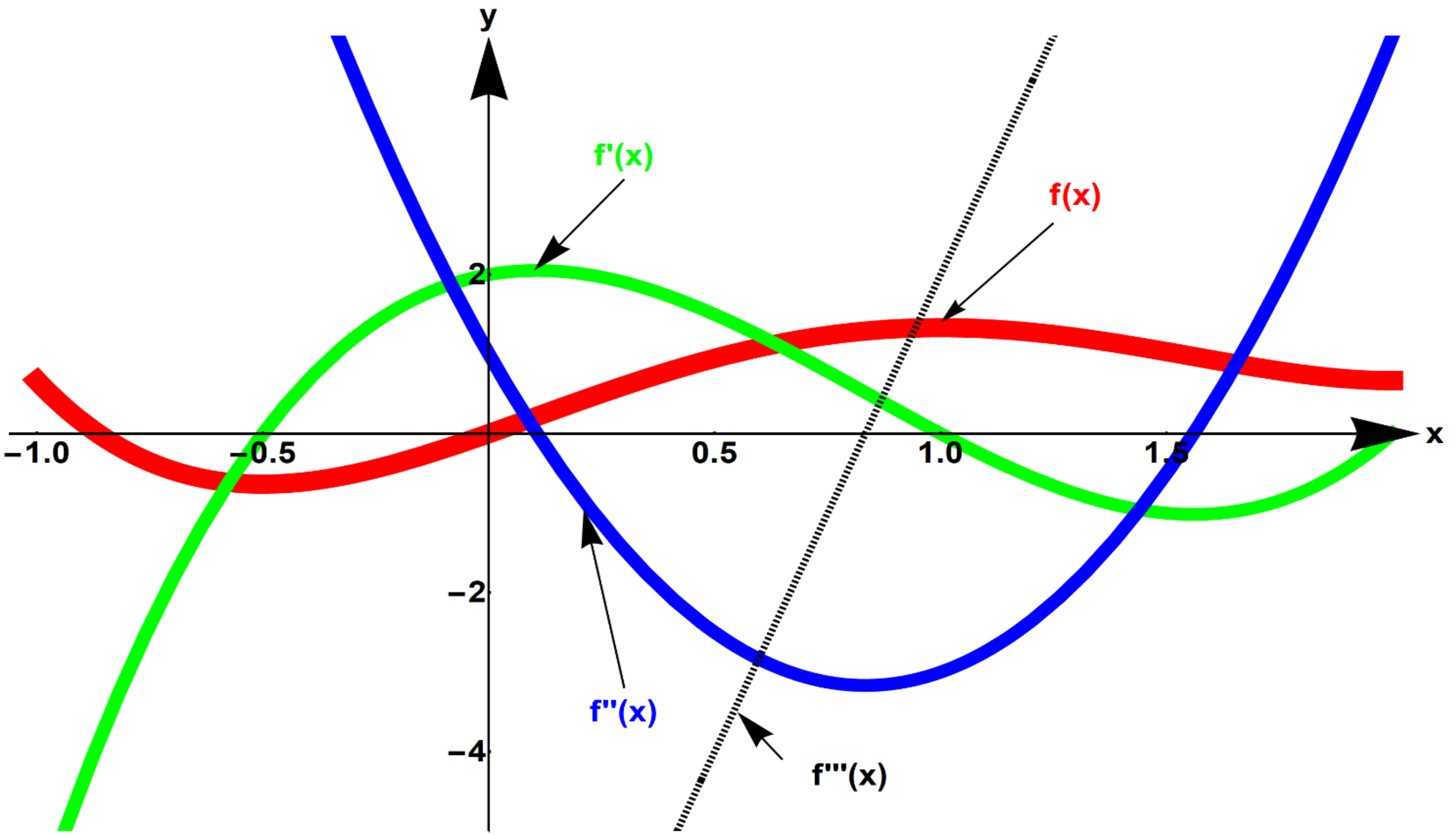


Abb. 6.3. Die Funktion f und deren 1., 2. und 3. Ableitung

Bemerkung 6.2:

In der Abb. 6.3 entspricht

$f'(x)$ der ***Steigung der Tangente*** von f an der Stelle x,

$f''(x)$ der ***Krümmun***g und

$f'''(x)$ der ***Änderung der Krümmung*** von f an der Stelle x.

6.3 Kurvendiskussion

Für differenzierbare Funktionen liefern die Ableitungen Informationen über den Kurvenverlauf.
Dazu zunächst einige Begriffsbildungen:

Definition 6.3:

(1) Eine Funktion f hat an der Stelle $x_0 \in D_f$ ein **relatives Maximum**, wenn für eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ gilt:

$$f(x) < f(x_0) \text{ für alle } x \in U_\varepsilon(x_0) \backslash \{x_0\} =: \dot{U}_\varepsilon(x_0)$$

Definition 6.3:

(1) Eine Funktion f hat an der Stelle $x_0 \in D_f$ ein **relatives Maximum**, wenn für eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ gilt:

$$f(x) < f(x_0) \; für \; alle \; x \in U_\varepsilon(x_0) \backslash \{x_0\} =: \dot{U}_\varepsilon(x_0)$$

(2) f hat ein **relatives Minimum**, wenn für eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ gilt:

$$f(x) > f(x_0) \text{ für alle } x \in U_\varepsilon(x_0) \backslash \{x_0\} =: \dot{U}_\varepsilon(x_0)$$

Definition 6.3:

(1) Eine Funktion f hat an der Stelle $x_0 \in D_f$ ein **relatives Maximum**, wenn für eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ gilt:

$$f(x) < f(x_0)\ für\ alle\ x \in U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\} =: \dot{U}_\varepsilon(x_0)$$

(2) f hat ein **relatives Minimum**, wenn für eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ gilt:

$$f(x) > f(x_0) \text{ für alle } x \in U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\} =: \dot{U}_\varepsilon(x_0)$$

(3) f hat an der Stelle $x_0 \in D_f$ einen ***Wendepunkt***, wenn

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad y'''(x_0) \neq 0.$$

Es gilt der **Satz**:

Wenn f an der Stelle $x_0 \in D_f$ zweimal differenzierbar ist und es gilt

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) \neq 0,$$

- dann hat f an der Stelle x_0 einen **relativen Extremwert**, das heißt ein relatives Maximum oder ein relatives Minimum.

Es gilt der **Satz**:

Wenn f an der Stelle $x_0 \in D_f$ zweimal differenzierbar ist und es gilt

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) \neq 0,$$

- dann hat f an der Stelle x_0 einen **relativen Extremwert**, das heißt ein relatives Maximum oder ein relatives Minimum.

- Insbesondere hat f an der Stelle x_0 ein **relatives Minimum,** wenn $f''(x_0) > 0$, bzw. ein **relatives Maximum**, wenn $f''(x_0) < 0$.

Es gilt der **Satz**:

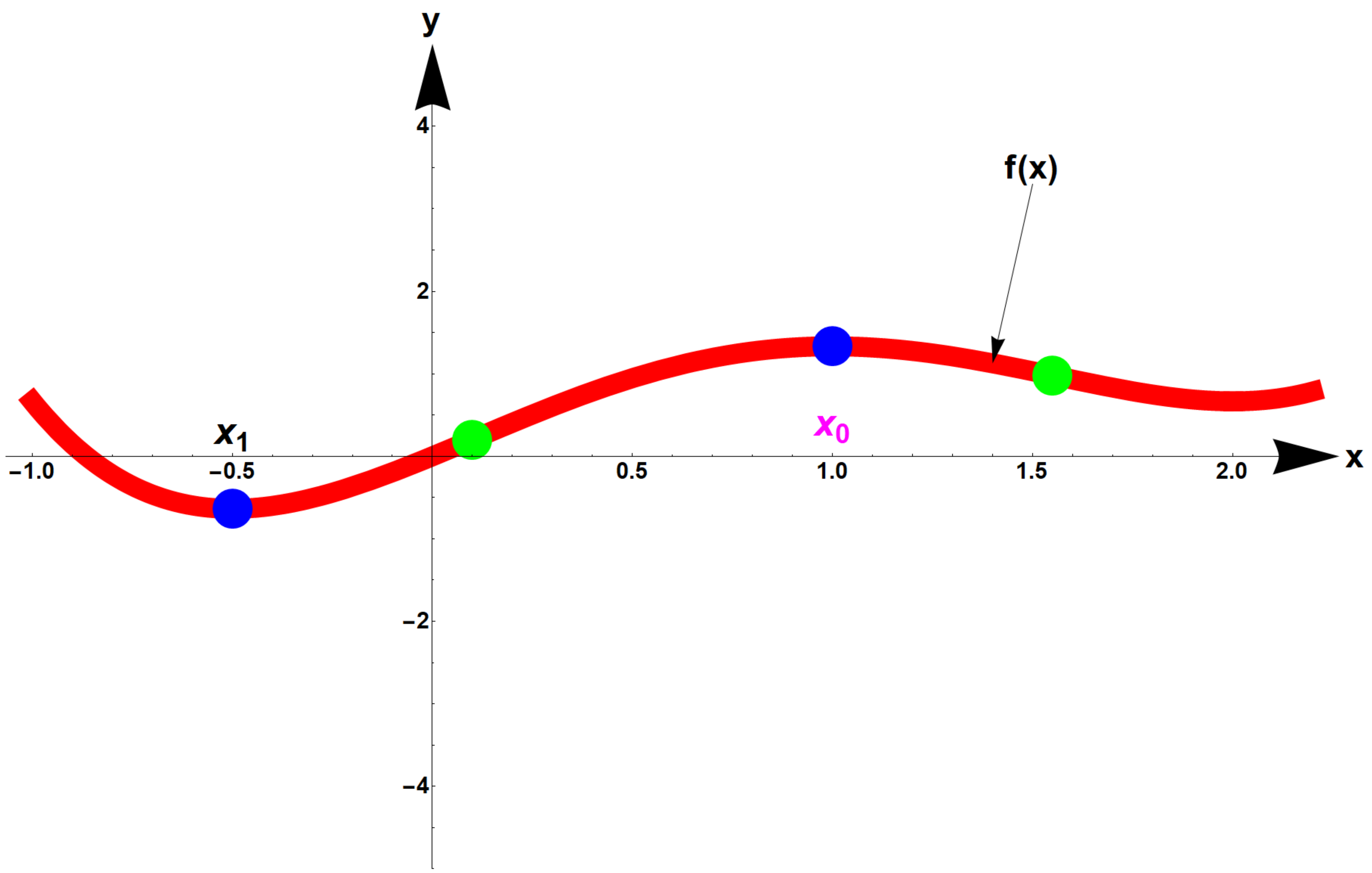
Wenn f an der Stelle $x_0 \in D_f$ zweimal differenzierbar ist und es gilt

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) \neq 0,$$

- dann hat f an der Stelle x_0 einen **relativen Extremwert**, das heißt ein relatives Maximum oder ein relatives Minimum.

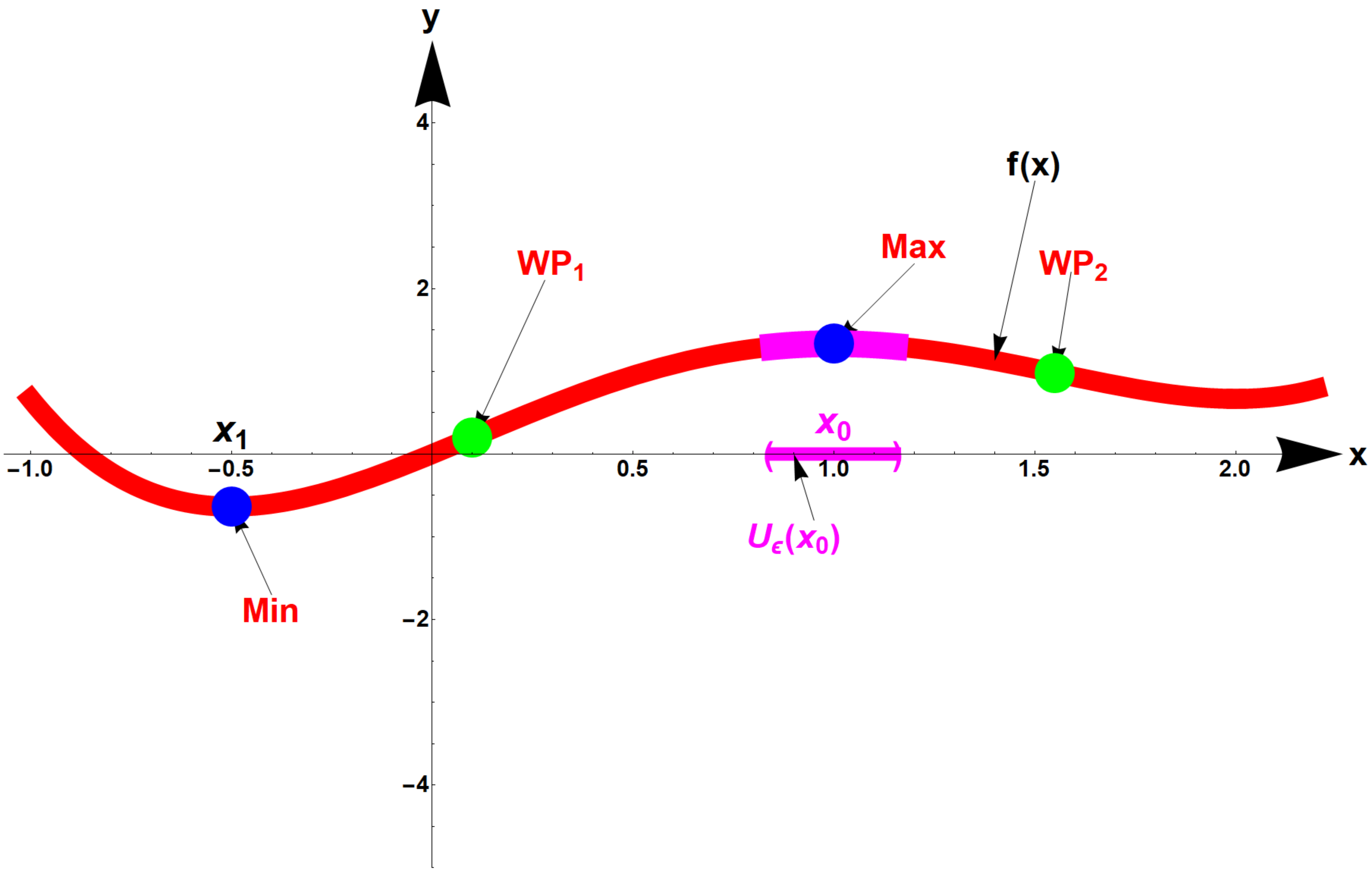
- Insbesondere hat f an der Stelle x_0 ein **relatives Minimum,** wenn $f''(x_0) > 0$, bzw. ein **relatives Maximum**, wenn $f''(x_0) < 0$.

- Wenn f' an der Stelle x_0 einen Extremwert hat, dann hat f dort einen Wendepunkt (= Nullstelle von f'');

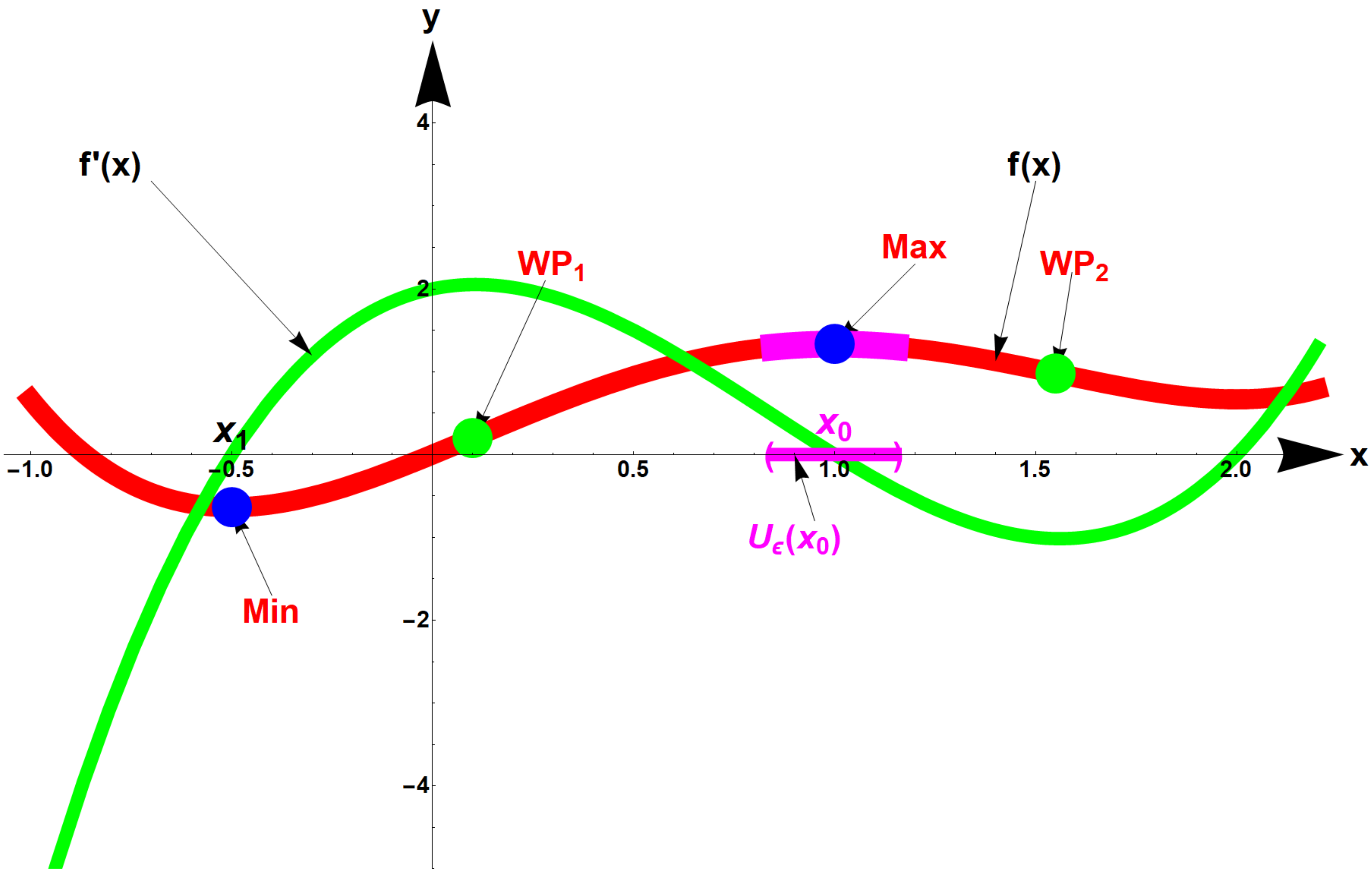


y
4
2
−2
−4
x
−1.0
−0.5
0.5
1.0
1.5
2.0
f(x)
x_1
x_0

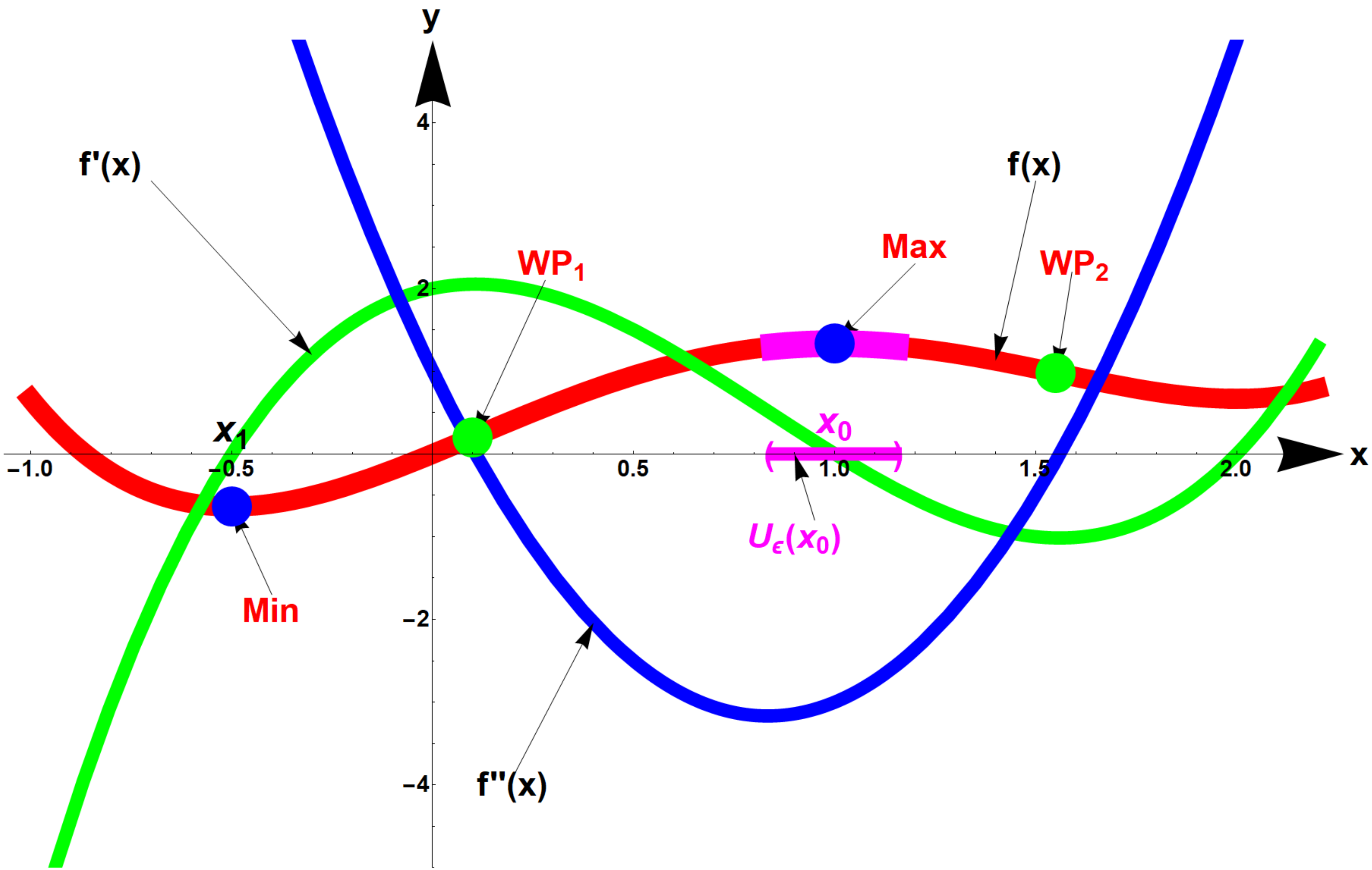
In einer ε-Umgebung von x_0 sind alle Funktionswerte kleinee als das Maximum



Wenn f' einen Extremwert hat, dann hat f dort einen Wendepunkt ;



Wenn f'' eine Nullstelle hat, dann hat f dort einen Wendepunkt (Krümmung wechselt das Vorzeichen);



Wenn f''' eine Nullstelle hat, dann hat f'' dort einen Extremwert ;

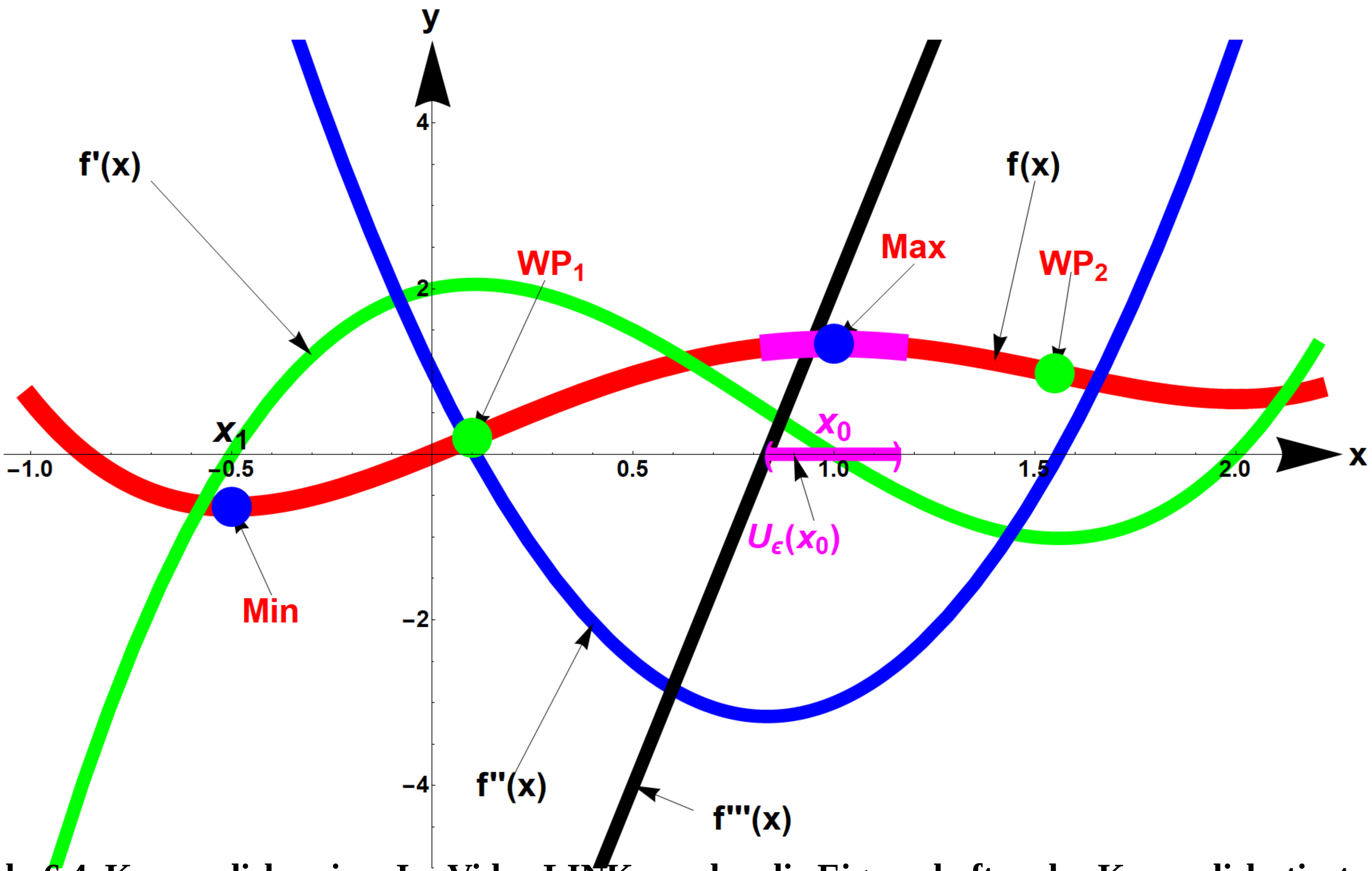


Abb. 6.4. Kurvendiskussion. Im Video LINK werden die Eigenschaften der Kurve diskutiert.

https://sn.pub/SoaeRZ

Um den Kurvenverlauf einer Funktion zu analysieren, untersucht man die Eigenschaften der Funktion zu folgenden Punkten:

(1) Definitionsbereich/Definitionslücken

Um den Kurvenverlauf einer Funktion zu analysieren, untersucht man die Eigenschaften der Funktion zu folgenden Punkten:

(1) Definitionsbereich/Definitionslücken

(2) Symmetrie (gerade, ungerade), Periodizität

Um den Kurvenverlauf einer Funktion zu analysieren, untersucht man die Eigenschaften der Funktion zu folgenden Punkten:

(1) Definitionsbereich/Definitionslücken

(2) Symmetrie (gerade, ungerade), Periodizität

(3) Nullstellen, Schnittpunkte mit der x-Achse

Um den Kurvenverlauf einer Funktion zu analysieren, untersucht man die Eigenschaften der Funktion zu folgenden Punkten:

(1) Definitionsbereich/Definitionslücken

(2) Symmetrie (gerade, ungerade), Periodizität

(3) Nullstellen, Schnittpunkte mit der x-Achse

(4) Pole (Nullstellen im Nenner)

Um den Kurvenverlauf einer Funktion zu analysieren, untersucht man die Eigenschaften der Funktion zu folgenden Punkten:

(1) Definitionsbereich/Definitionslücken

(2) Symmetrie (gerade, ungerade), Periodizität

(3) Nullstellen, Schnittpunkte mit der x-Achse

(4) Pole (Nullstellen im Nenner)

(5) Relative Extremwerte (Maxima, Minima)

Um den Kurvenverlauf einer Funktion zu analysieren, untersucht man die Eigenschaften der Funktion zu folgenden Punkten:

(1) Definitionsbereich/Definitionslücken

(2) Symmetrie (gerade, ungerade), Periodizität

(3) Nullstellen, Schnittpunkte mit der x-Achse

(4) Pole (Nullstellen im Nenner)

(5) Relative Extremwerte (Maxima, Minima)

(6) Wendepunkte

Um den Kurvenverlauf einer Funktion zu analysieren, untersucht man die Eigenschaften der Funktion zu folgenden Punkten:

(1) Definitionsbereich/Definitionslücken

(2) Symmetrie (gerade, ungerade), Periodizität

(3) Nullstellen, Schnittpunkte mit der x-Achse

(4) Pole (Nullstellen im Nenner)

(5) Relative Extremwerte (Maxima, Minima)

(6) Wendepunkte

(7) Asymptotisches Verhalten (wird ermittelt über die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$)

Um den Kurvenverlauf einer Funktion zu analysieren, untersucht man die Eigenschaften der Funktion zu folgenden Punkten:

(1) Definitionsbereich/Definitionslücken

(2) Symmetrie (gerade, ungerade), Periodizität

(3) Nullstellen, Schnittpunkte mit der x-Achse

(4) Pole (Nullstellen im Nenner)

(5) Relative Extremwerte (Maxima, Minima)

(6) Wendepunkte

(7) Asymptotisches Verhalten (wird ermittelt über die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$)

(8) Wertebereich

Beispiel 11:

Sei

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 5}{x^3} \ .$$

Wir diskutieren nun die Eigenschaften der Funktion. Dann gilt zu den einzelnen Punkten:

(1) Der **Definitionsbereich** ist $D_f = R \ \backslash\{0\}$, da bei $x = 0$ eine Polstelle ist.

(2) Die **Symmetrie** ist ungerade, da $f(x) = \frac{gerade\ Funktion}{ungerade\ Funktion}$.

(3) Die **Nullstellen** werden berechnet mit

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 5}{x^3} = 0.$$

Daraus folgt

$$-2x^2 + 5 = 0$$

und

$$-2x^2 + 5 = 0 \;\Rightarrow x^2 = \frac{5}{2}\ ,$$

also sind

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{2{,}5} = \pm 1{,}58$$

Nullstellen von f.

(4) Pole: Bei $x_0 = 0$ ist eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel (Nenner ist ungerade).

(5) Relative **Extremwerte** (Maxima, Minima):

Die erste Ableitung ist $f'(x) = \frac{-15+2x^2}{x^4}$.

Dann gilt

$$f'(x) = \frac{-15+2x^2}{x^4} = 0,$$

daraus folgt

$$2x^2 - 15 = 0 \text{ und } x^2 = \frac{15}{2} .$$

Also sind

$$x_4 = +\sqrt{7{,}5\ } = +2{,}74 \quad \text{und} \qquad x_5 = -\sqrt{7{,}5\ } = -2{,}74$$

„kritische“ Punkte.

Mit

$$f''^{(x)} = \frac{60 - 4x^2}{x^5}$$

folgt (x_4 eingesetzt):

$$f''(x_4) = \frac{-30 + 60}{2{,}74^5} = 0{,}19 > 0$$

Damit ist bei x_4 ein **relatives Minimum** mit dem Funktionswert

$$y_4 = f(x_4) = \frac{-2{x_4}^2 + 5}{{x_4}^3} = -0{,}49.$$

Ebenso gilt (x_5 eingesetzt):

$$f''(x_5) = \frac{-30 + 60}{-2{,}74^5} = -\,0{,}19 < 0$$

Damit ist bei x_5 ein **relatives Maximum** mit dem Funktionswert

$$y_5 = f(x_5) = \frac{-2{x_5}^2 + 5}{{x_5}^3} = 0{,}49.$$

(6) Die **Wendepunkte** werden berechnet mit

$$f''(x) = \frac{60 - 4x^2}{x^5} = 0.$$

Dann folgt:

$$-4x^2 + 60 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 = \frac{60}{4}$$

Somit sind

$$x_6 = +\sqrt{15} = +3{,}87 \text{ und } x_7 = -\sqrt{15} = -3{,}87$$

„kritische“ Punkte für Wendepunkte.

Mit der dritten Ableitung

$$f'''(x) = \frac{12x^2-300}{x^6}$$

folgt

$$f'''(x_6) = \frac{12{x_6}^2-300}{{x_6}^6} = -0{,}03 \neq 0$$

und

$$f'''(x_7) = \frac{12{x_7}^2-300}{{x_7}^6} = -0{,}03 \neq 0.$$

Somit sind

$$x_6 = +3{,}87 \text{ und } x_7 = -3{,}87$$

Wendepunkte mit den Funktionswerten

$$y_6 = f(x_6) = \frac{-2{x_6}^2+5}{{x_6}^3} = -0{,}43 \text{ und}$$

$$y_7 = f(x_7) = \frac{-2{x_7}^2+5}{{x_7}^3} = -0{,}43.$$

(7) Das **asymptotische Verhalten** bei $x \to \pm\infty$ wird ermittelt über die Grenzwerte

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 5}{x^3} = \frac{-\frac{2}{x} + \frac{5}{x^3}}{1} \to 0 \quad f\text{ür} \quad x \to \pm\infty.$$

(8) Der **Wertebereich** ist

$$D_W = \mathbb{R},$$

weil die Funktion einen ungeraden Pol hat.

Die grafische Darstellung zum Beispiel 6.4 ist die Abb. 6.

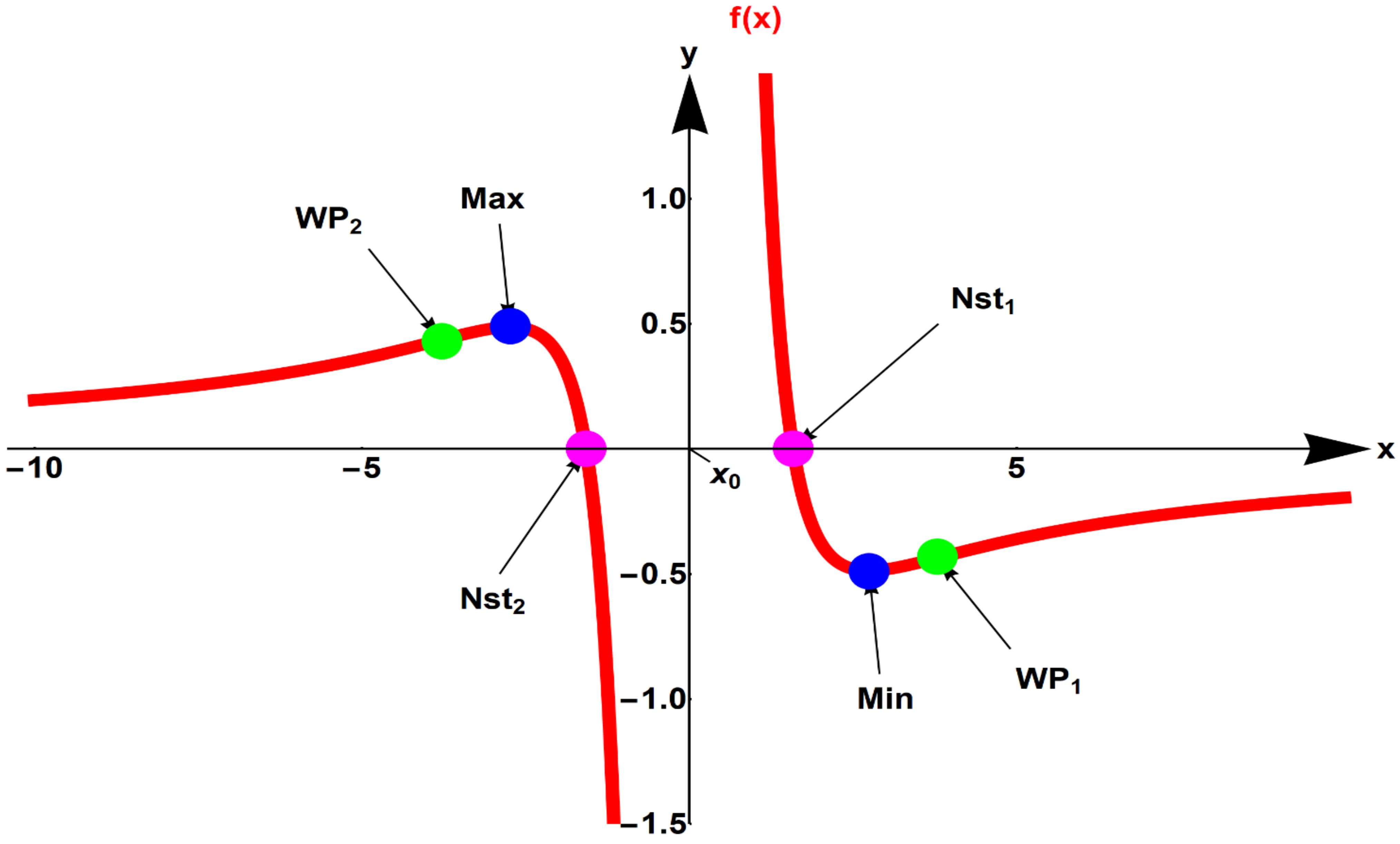


Abb. 6.5. Kurvendiskussion: Beispiel 6.4