4.1 Laplace Transformationen

H.L.Cycon

Warum Laplace Transformationen?

- Vorteile von Laplace-Transformationen sind:
- Sie ermöglichen elegante Lösungen von Anfangswertproblemen, da die Anfangsbedingungen in den Transformationsprozess einbezogen werden (s. Kapitel 21.2.1).
- Sie erweitern die Lösungsmöglichkeiten für inhomogene Differentialgleichungen, da unstetige Störfunktionen zugelassen sind.
- Sie eignen sich besonders für die Berechnung von Einschaltvorgängen, da die Laplace-Integration nur über die positive Halbachse erfolgt.
- Sie sind auch ein wichtiges Instrumentarium bei der Beschreibung und Analyse von Übertragungssystemen (d.h. Systemtheorie, s. Kapitel 21.2.2).

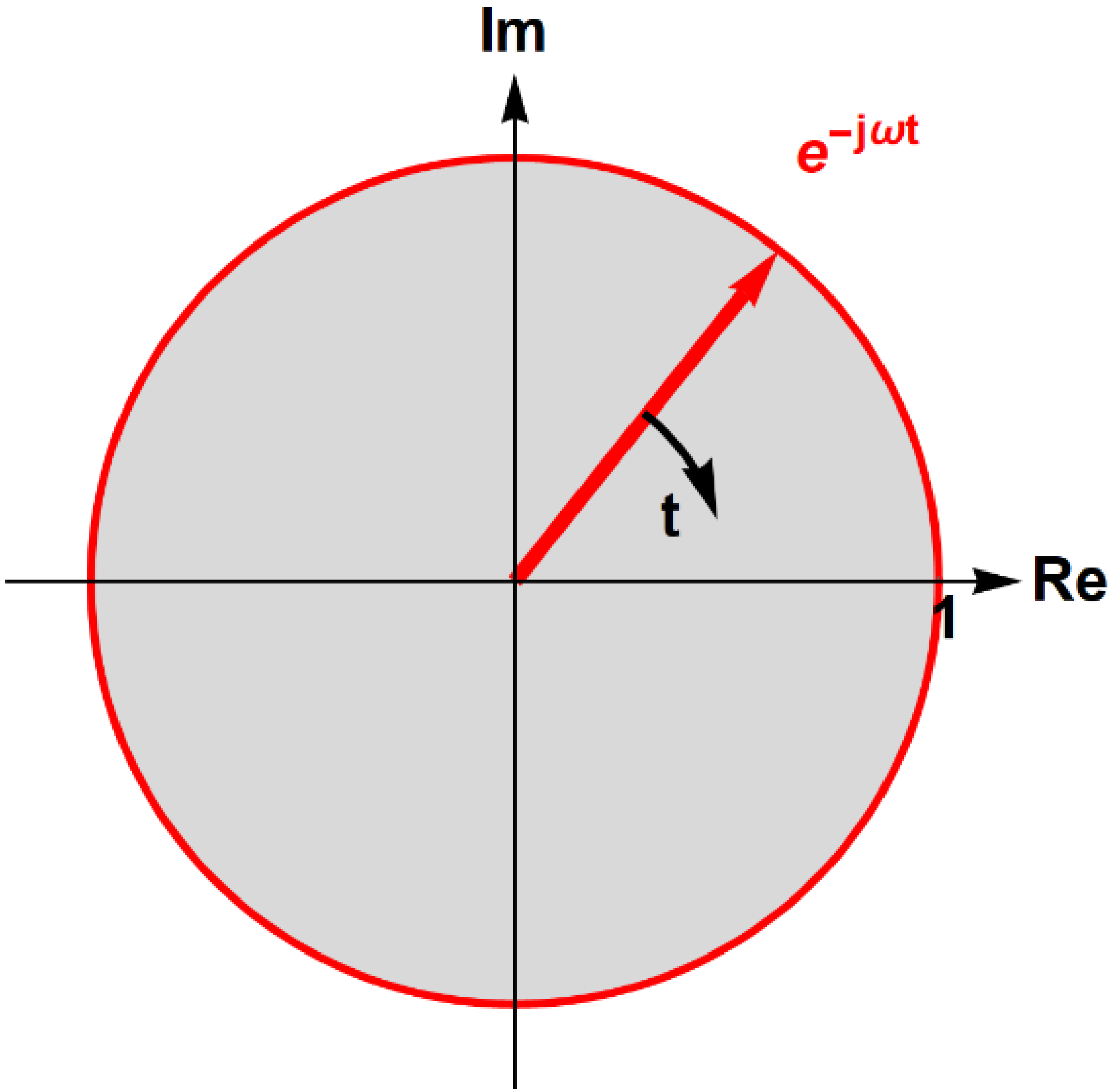
Beispiel (Heaviside Sprungfunktion)

$$\sigma(t) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ 1 & \text{für} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Fourierintegral

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)\, e^{-\mathrm{j}\omega t} dt$$

Existiert nicht!



Der komplexe Zeiger $e^{-j\omega t}$ ist nicht konvergent.
http://sn.pub/x30hbW

Wenn wir die Frequenzvariable jω ins Komplexe erweitern

$$\omega \to s := \mathrm{j}\omega + \alpha,$$

haben wir

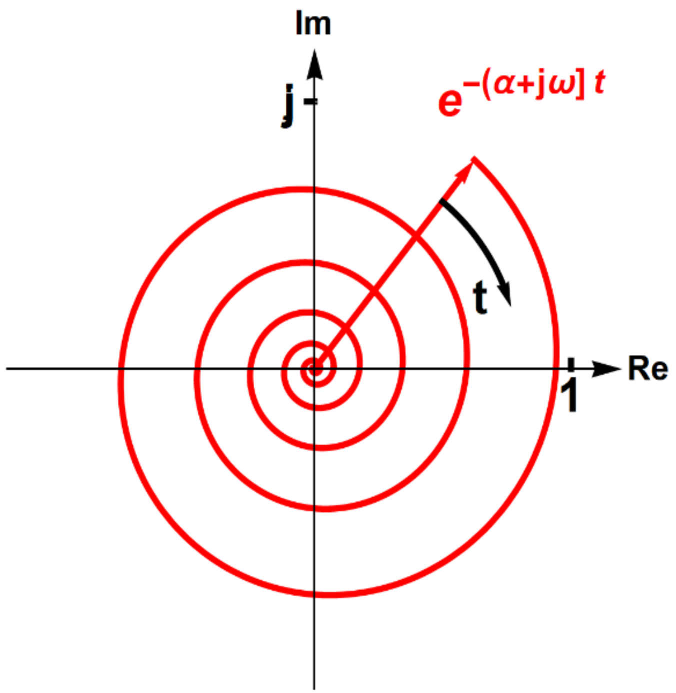
$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)\, e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\, e^{-\mathrm{j}\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{-(\alpha+\mathrm{j}\omega)} \left[e^{-\alpha t}\, e^{-\mathrm{j}\omega t} \right]_{t=0}^{t=\infty}$$

$$= \frac{1}{-(\alpha+\mathrm{j}\omega)} \left[\lim_{t\to\infty} \left(e^{-\alpha t}\, e^{-\mathrm{j}\omega t} \right) - e^{0} \right] =$$

$$= \frac{1}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)} = \frac{1}{s}$$

Der Grenzwert $\lim_{t \to \infty}(e^{-\alpha t}\, e^{-\mathrm{j}\omega t})$ ist 0, da der komplexe Zeiger $e^{-(\alpha+\mathrm{j}\omega)t} = e^{-\alpha t}\, e^{-\mathrm{j}\omega t}$ mit steigendem t gegen 0 „spiralt“:



Der komplexe Zeiger $e^{-(\alpha t+j\omega t)}$ konvergiert also gegen Null.

http://sn.pub/HwDZrf

Das führt zu folgender Idee:
Ersetze jω durch $\alpha + \mathrm{j}\omega =: s$, dann gilt

$$\int_0^\infty \sigma(t)\, e^{-st} dt = \frac{1}{s} \ .$$

Definition 21.1:
Die Abbildung

$$\mathcal{L}: \quad f(t) \qquad \rightarrow \qquad F(s) \coloneqq \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$$

mit $s \in \mathbb{C}$ und Re(s)$= \alpha \geq c > 0$ heißt ***Laplace-Transformation***.

Die Laplace Transformation ist eine Abbildung

$$f(t) \quad \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad F(s)$$

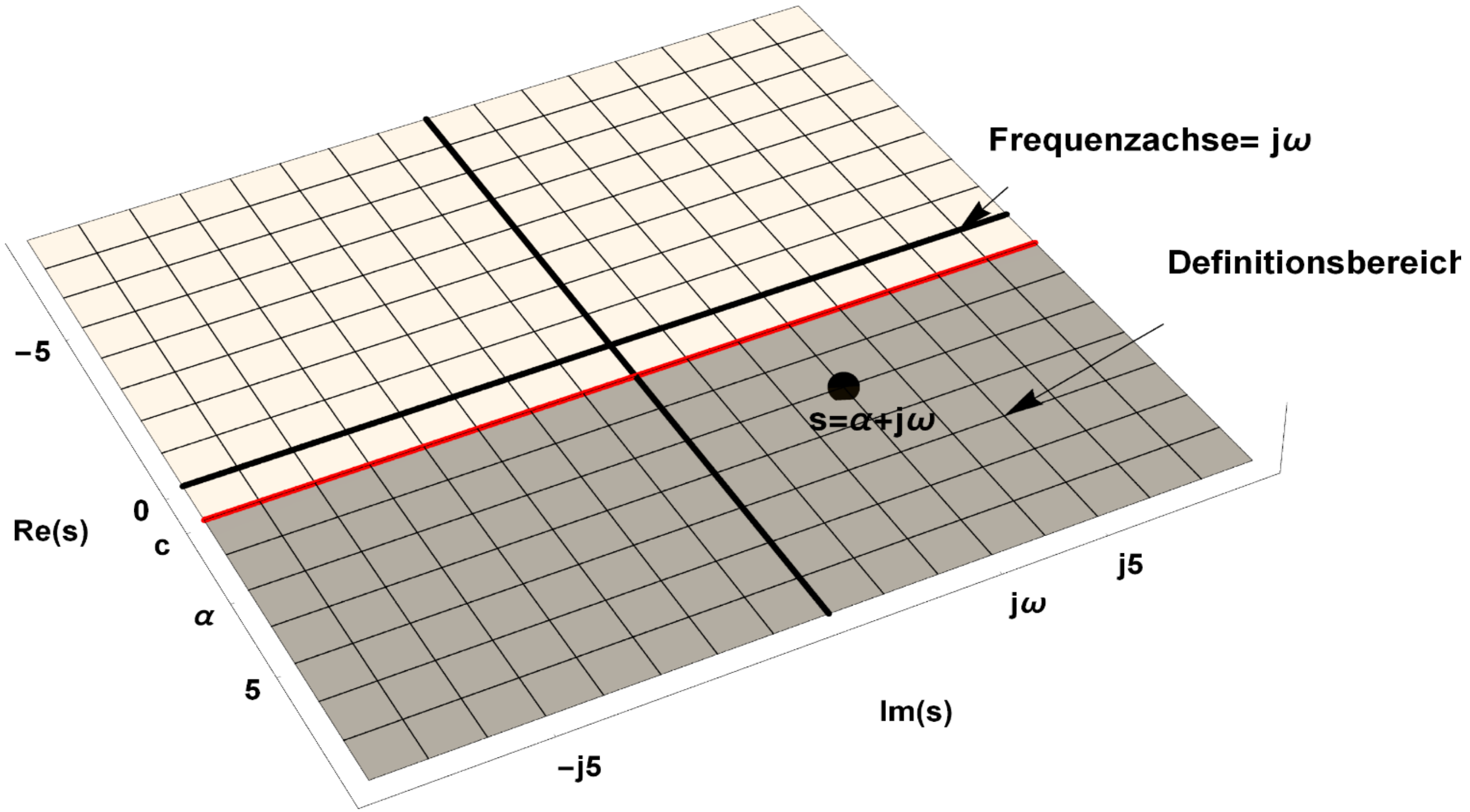
Zeitbereich ***Bildbereich.***

Die Laplace Transformationen einer Funktion f im Zeitbereich sind Funktionen F im Bildbereich. Sie sind definiert in der komplexen s-Ebene: $s \in \mathbb{C}$.
Der Frequenzbereich bei Fourier-Transformationen wird hier erweitert zum Bildbereich.

genauer: Der Definitionsbereich einer Laplace Transformierten F(s) ist eine Halbebene in $\mathbb{C}$

$$D_L = \{s \in \mathbb{C}\,|\mathrm{Re}(s) = \alpha \geq c > 0\} \quad \text{für ein } c > 0.$$

Die Variable s entspricht der (erweiterten) Frequenzvariablen ω bei Fourier-Transformierten. Es gilt $\mathrm{Im}(s) = \mathrm{Im}(\alpha + j\omega) = \omega.$



***s*-Ebene**

Rechenregeln für die Laplace-Transformation

(1)Linearität

$$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \alpha F_1(s) + \beta F_2(s) \quad \text{für } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(2) Verschiebungssatz

$$(f \cdot \sigma)(t - a) \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} e^{-as}\, F(s) \quad \text{für } a > 0$$

(Verschiebung nach rechts!)

(3) Dämpfungssatz

$$e^{-at} f(t) \quad \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad F(s+a)$$

(4) Differentiationssatz (Ableitung im Zeitbereich)

$$\frac{df(t)}{dt} \quad \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad s\,F(s) - f(0)$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \quad \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad s^2\,F(s) - (sf(0) + f'(0))$$

(wichtig beim Lösen von Differentialgleichungen!)

(5) Multiplikationssatz

$$t^n f(t) \quad \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad (-1)^n F^{(n)}(s)$$

(6) Divisionssatz

$$\frac{1}{t} f(t) \quad \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad \int_s^{\infty} F(u)\, du$$

(7) Ähnlichkeitssatz

$$f(at) \quad \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad \frac{1}{|a|}\, F\left(\frac{s}{a}\right),\ a \neq 0$$

(8) Faltungssatz

$$f_1(t) * f_2(t) \quad \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Definition der ***Laplace-Faltung:***
(Beachte die Grenzen!)

$$(f_1 * f_2)(t) := \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau$$

Einschub

Komplexwertigen Funktionen einer komplexen Variablen $w = f(z)$ sind Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$. Man kann sie darstellen entweder durch die Abbildung f zwischen zwei komplexen Ebenen (Abbildung der z-Ebene in die w-Ebene) oder durch eine Kombination von zwei Funktionen, das heißt Betragsfunktion f_B und Winkelfunktion f_φ:

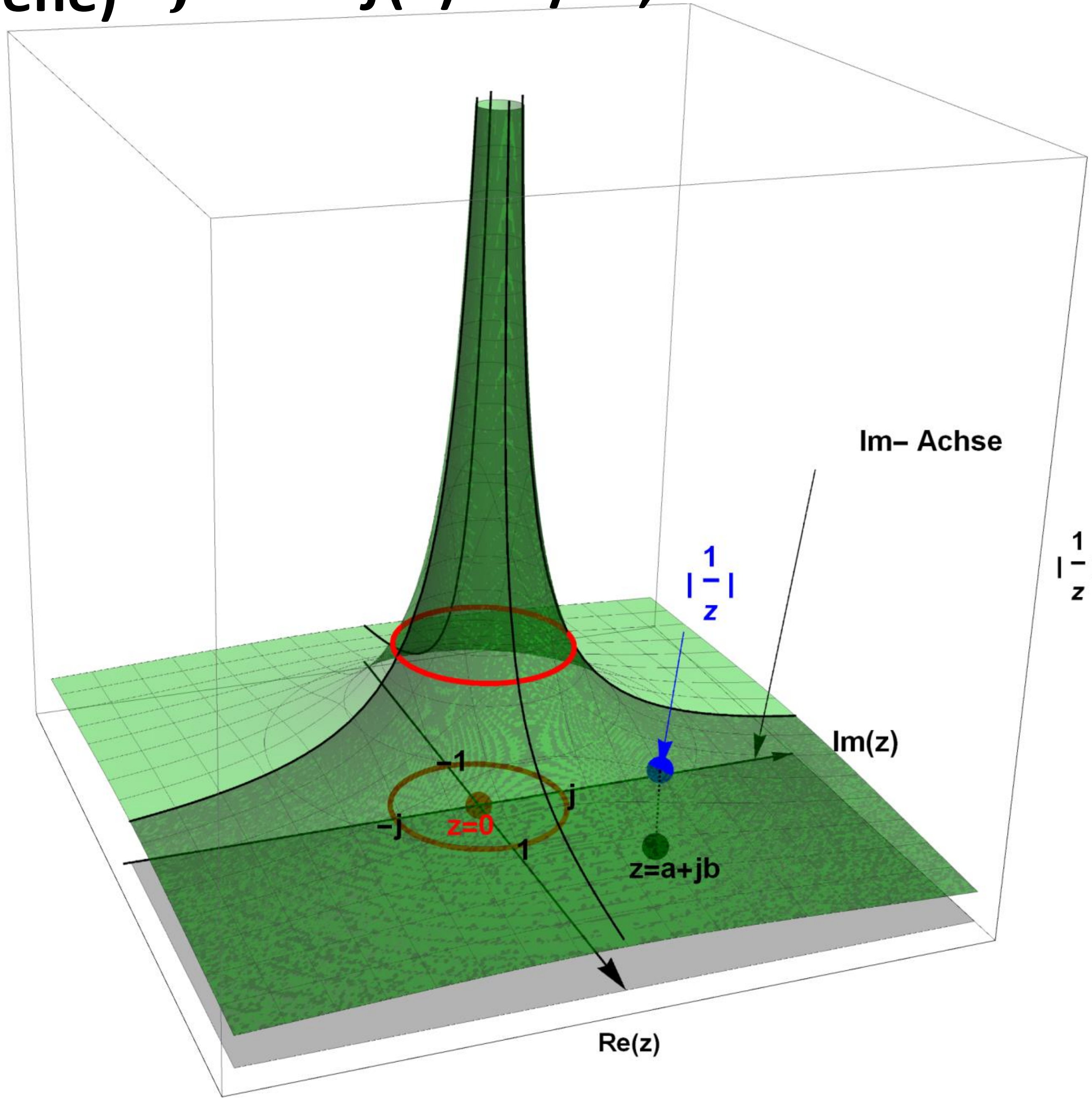
$$f_B\colon z = |z|e^{\varphi t} \to |z|, \qquad z \in \mathbb{C}$$

und

$$f_\varphi\colon |z|e^{\varphi t} \to \varphi, \qquad z \in \mathbb{C},$$

Die Winkelfunktion f_φ lassen wir hier weg.

Beispiel: (in der z-Ebene) $f: z \rightarrow f(z) = 1/z$, **wir betrachten** $f_B: z \rightarrow |1/z|$



Beispiel 21.1 (Heaviside-Funktion (Wiederholung))

Sei

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ 1 & \text{für} \quad t \geq 0 \end{cases}.$$

Die Laplace-Transformierte von $\sigma(t)$ ist dann mit s= $\alpha + j\omega$ (s. Abb. 21.3):

$$F(s) = \int_0^\infty \sigma(t)\, e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\, e^{-\mathrm{j}\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{-(\alpha + \mathrm{j}\omega)} \left[e^{-\alpha t}\, e^{-\mathrm{j}\omega t}\right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{-s} \left[\lim_{t\to\infty} (\, e^{-\alpha t}\, e^{-\mathrm{j}\omega t}) - e^0\right]$$

$$= \frac{1}{s}$$

Das Integral $F(s) = \int_0^\infty e^{-(\alpha+\mathrm{j}\omega)t}\, dt$ existiert,

da der Betrag des Grenzwertes $\lim_{t\to\infty}(e^{-\alpha t}\, e^{-\mathrm{j}\omega t})$ gegen 0 konvergiert,

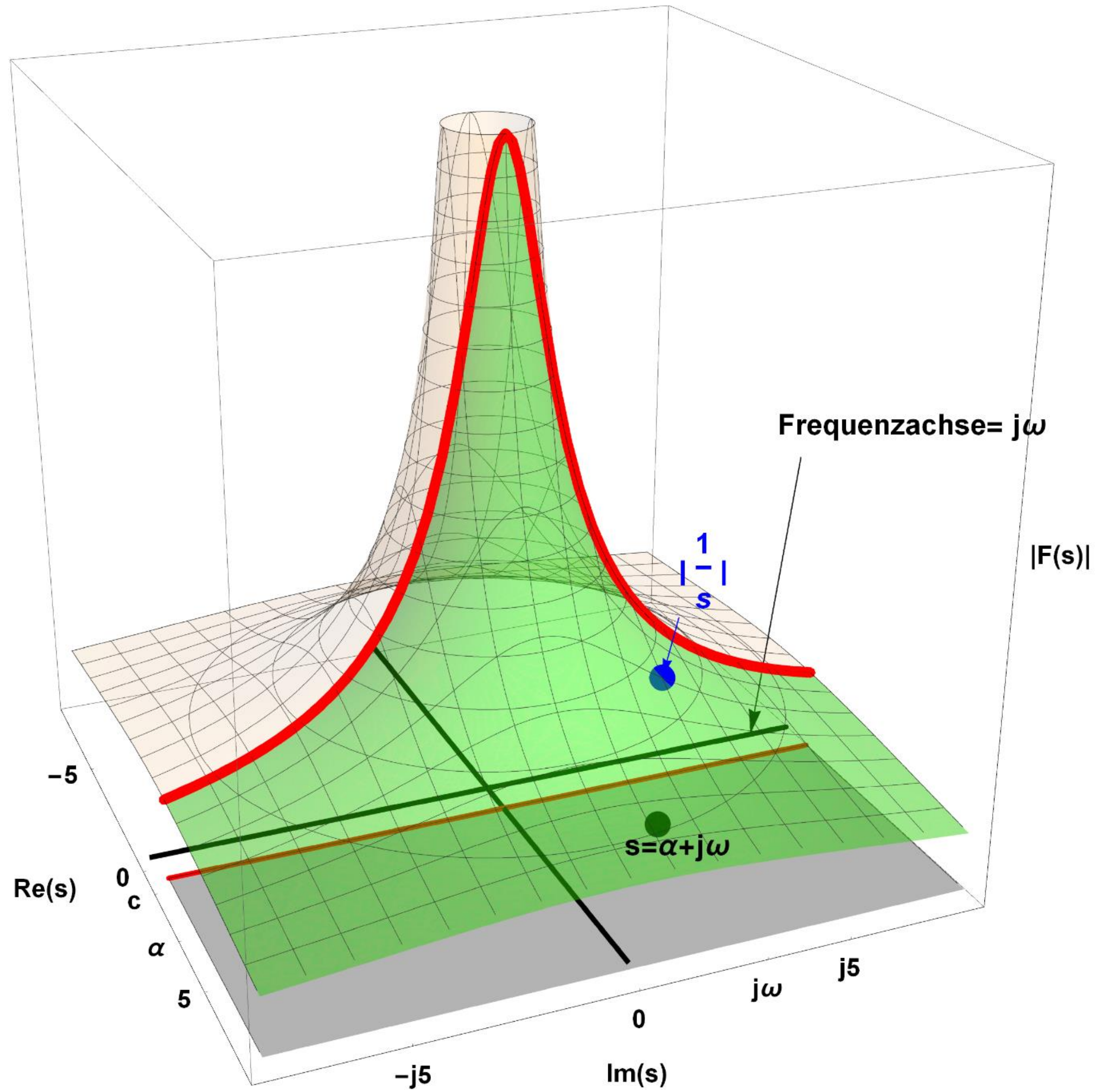
denn es gilt für die Beträge

$$\lim_{t\to\infty}\left|e^{-\alpha t}e^{-\mathrm{j}\omega t}\right| = \lim_{t\to\infty}\left|e^{-\alpha t}\right|\left|\, e^{-\mathrm{j}\omega t}\right| = \lim_{t\to\infty}\left|e^{-\alpha t}\right| = 0.$$

Oder:

da komplexe Zeiger $e^{-(\alpha+\mathrm{j}\omega)t} = {\color{red}e^{-\alpha t}}\, e^{-\mathrm{j}\omega t}$ mit steigendem t gegen 0 „spiralt“:

Darstellung in der s-Ebene: $|F(s)|$ = Betrag von L$(\sigma(t))$ = | 1/s |, Re(s)>c



Es gilt:
Die Funktion

$$1(t) = f(t) \equiv 1$$

und die Heaviside-Funktion

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ 1 & \text{für} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

haben dieselbe Laplace-Transformierte:

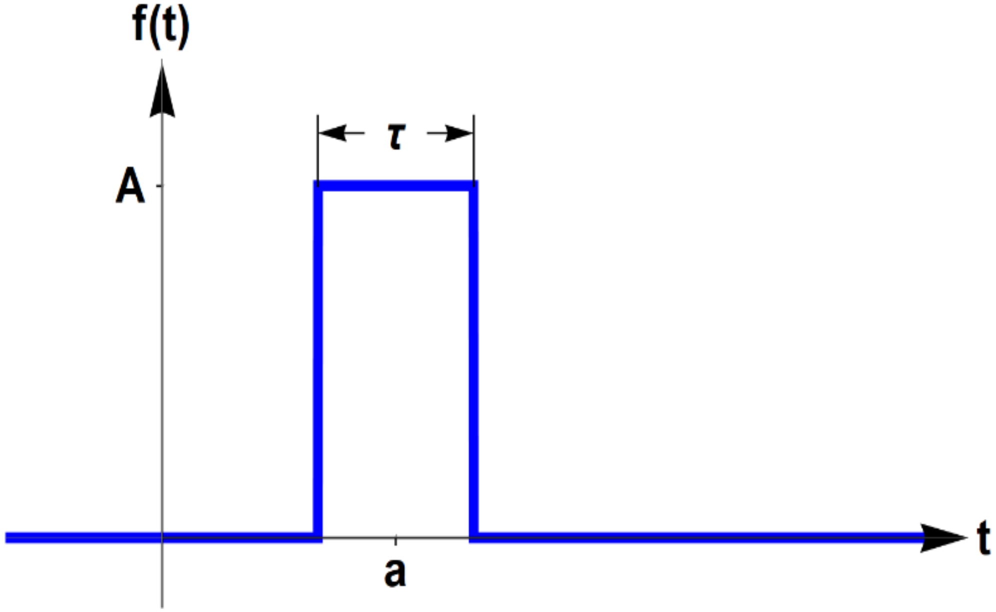
$$\left.\begin{matrix} \sigma(t) \\ 1(t) \end{matrix}\right\} \quad \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad F(s) = \frac{1}{s}$$

Da die L-Transformation nur über die positive Halbachse integriert.

Beispiel 21. 2 (Einzelimpuls verschoben)

Sei

$$f(t) = \begin{cases} A & f\text{ür} \quad t \in \left[a - \frac{\tau}{2}, a + \frac{\tau}{2}\right] \\ 0 & sonst \end{cases} \quad .$$



Dann ist die Laplace-Transformierte:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt =$$

$$\int_{a-\frac{\tau}{2}}^{a+\frac{\tau}{2}} A\, e^{-st} dt = \frac{A}{-s}\left[e^{-st}\right]_{t=a-\frac{\tau}{2}}^{t=a+\frac{\tau}{2}} =$$

$$\frac{Ae^{-sa}}{-s}\left[e^{s(\tau/2)} - e^{-s(\tau/2)}\right]$$

Beispiel 21.3 (exponentiell ansteigende Funktion)

Betrachte für $s = \alpha + \mathrm{j}\omega$ und $0 < b < \alpha$ die exponentiell ansteigende Funktion

$f(t) = e^{bt}, \quad t \geq 0.$

Dann ist die Laplace-Transformierte (s. Abb. 21.5):

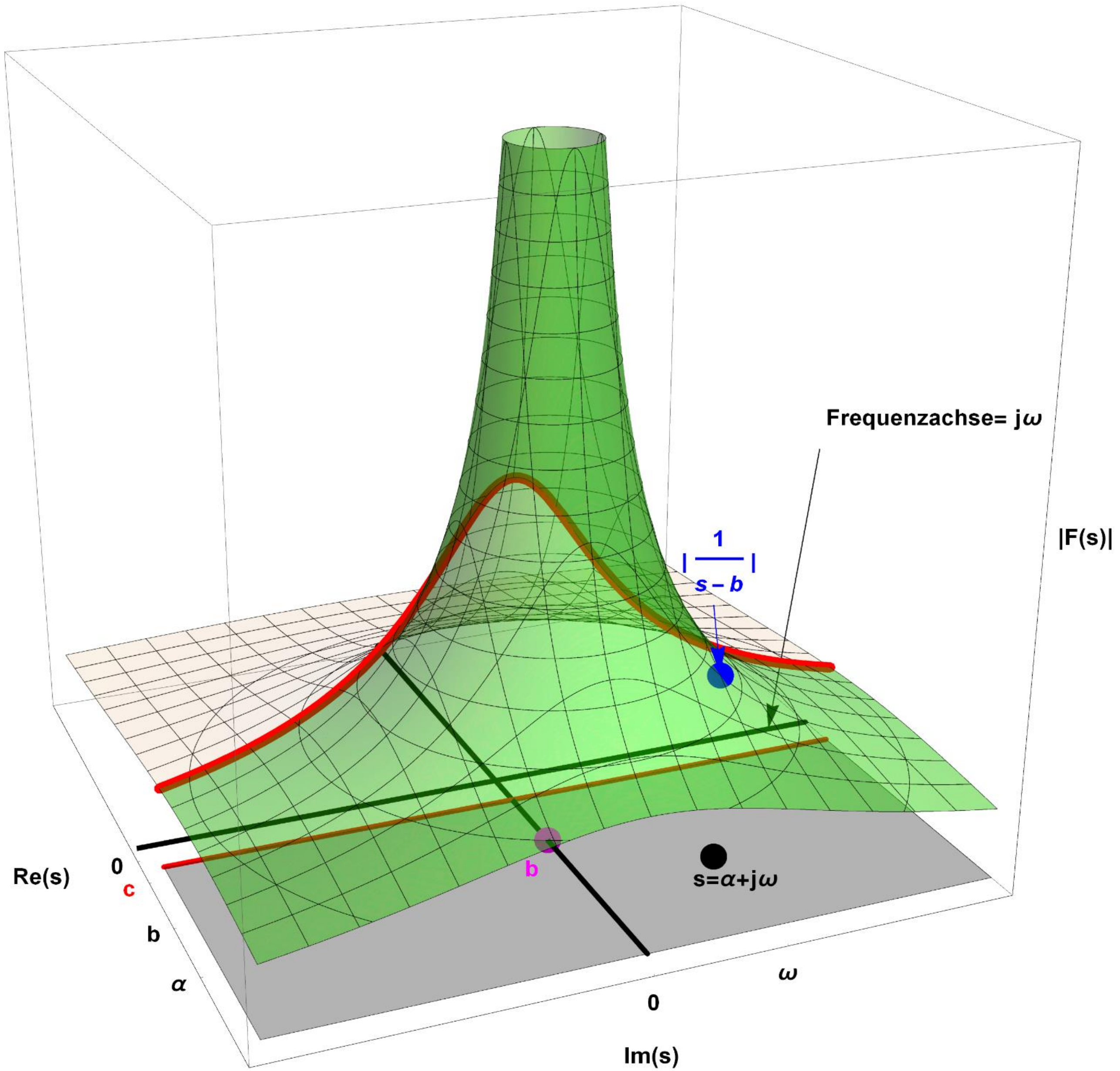
$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{bt}\, e^{-(\alpha+\mathrm{j}\omega)t} dt =$$

$$\int_0^\infty e^{(b-\alpha-\mathrm{j}\omega)t}\,dt = \frac{1}{(b-\alpha-\mathrm{j}\omega)}\left[\,e^{(b-\alpha-\mathrm{j}\omega)t}\right]_{t=0}^{t=\infty} =$$

$$\frac{1}{b-(\alpha+\mathrm{j}\omega)}\left[\underbrace{\lim_{t\to\infty}\left(\,e^{-(\alpha-b)t}\;e^{-\mathrm{j}\omega t}\right)}_{=\,0,\ \mathrm{da}\ \alpha>b} - e^{0}\right] = \frac{1}{(s-b)}$$

(Die Argumentation mit Beispiel 21.1und dem Dämpfungssatz (3) führt zum gleichen Ergebnis!)

$|F(s)|$ = Betrag von $L(e^{bt})$= | 1/s-b |



Beispiel 21.4 (Laplace-Transformation von sin(ω_0t)

Aus Beispiel 21.1 folgt

$$1 \quad \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad \frac{1}{s}$$

und dem Dämpfungssatz (21.3) ergibt sich

$$e^{\pm j\omega_0 t} 1 = e^{\pm j\omega_0 t} \quad \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad \frac{1}{s \mp j\omega_0}$$

und mit der Eulerschen Gleichung für die Sinusfunktion (2.5),

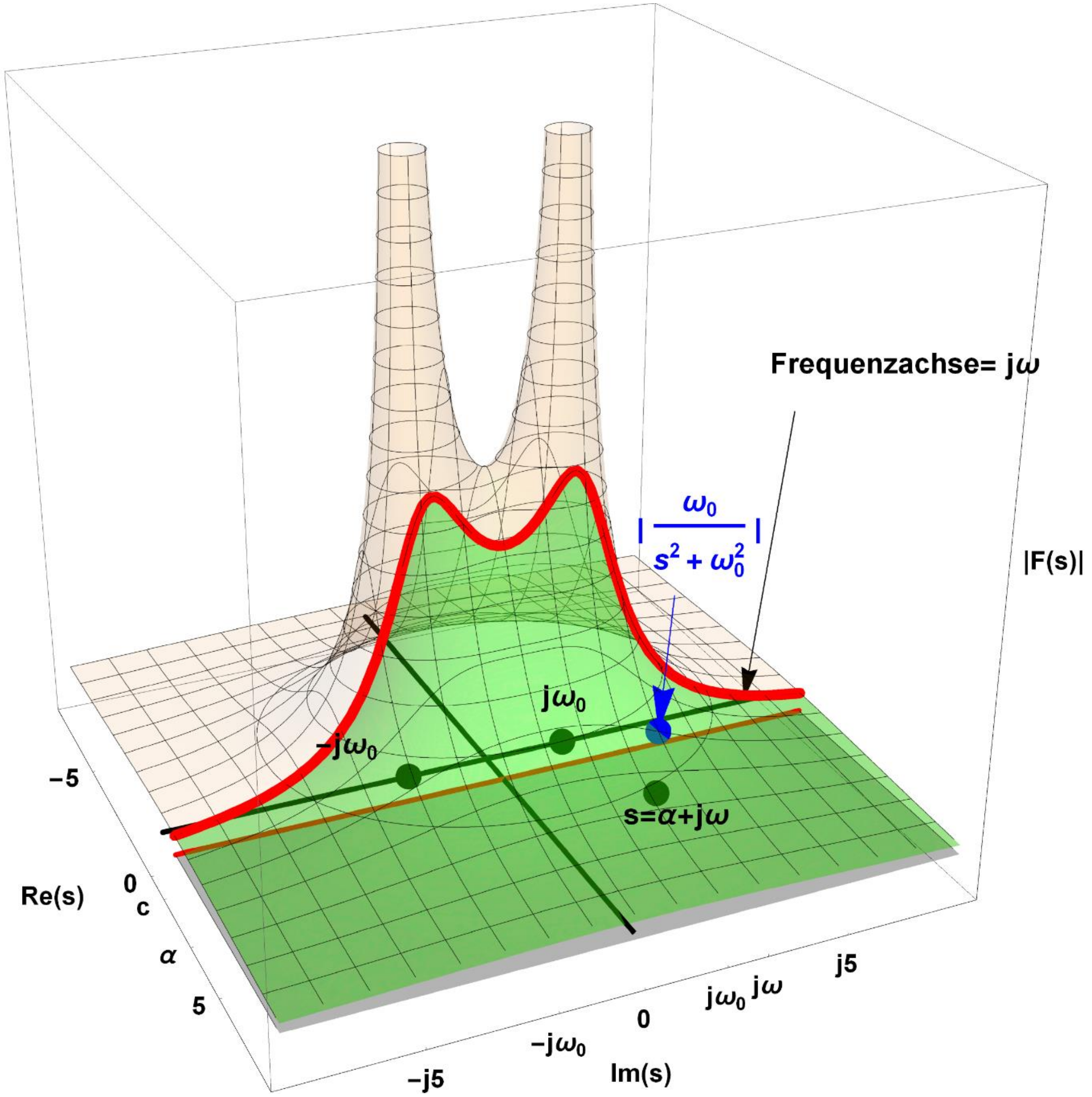
$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(e^{\mathrm{j}\omega_0 t} - e^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right) \quad \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad F(s) = \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega_0} - \frac{1}{s+\mathrm{j}\omega_0}\right)$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\frac{(s+\mathrm{j}\omega_0)-(s-\mathrm{j}\omega_0)}{s^2+\omega_0^2}\right) = \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\frac{(2\mathrm{j}\omega_0)}{s^2+\omega_0^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{(\omega_0)}{s^2+\omega_0^2}\right)$$

(zwei Singularitäten!)

$|F(s)|$ = Betrag von L$(\sin(\omega_0 t))$



Beispiel 21.5 (Laplace-Transformation von Cos(ω_0t))

Aus Beispiel 21.1 und dem Dämpfungssatz (21.3) ergibt sich

$$e^{\pm \mathrm{j}\omega_0 t} \quad \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad \frac{1}{s \mp \mathrm{j}\omega_0}$$

und mit der Eulerschen Gleichung für die Cossinusfunktion (2.5),

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{j}\omega_0 t} + e^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right) \quad \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - \mathrm{j}\omega_0} + \frac{1}{s + \mathrm{j}\omega_0}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(s+\mathrm{j}\omega_0)+(s-\mathrm{j}\omega_0)}{s^2+\omega_0^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(2s)}{s^2+\omega_0^2}\right) = \left(\frac{(s)}{s^2+\omega_0^2}\right)$$ (zwei Singularitäten!)