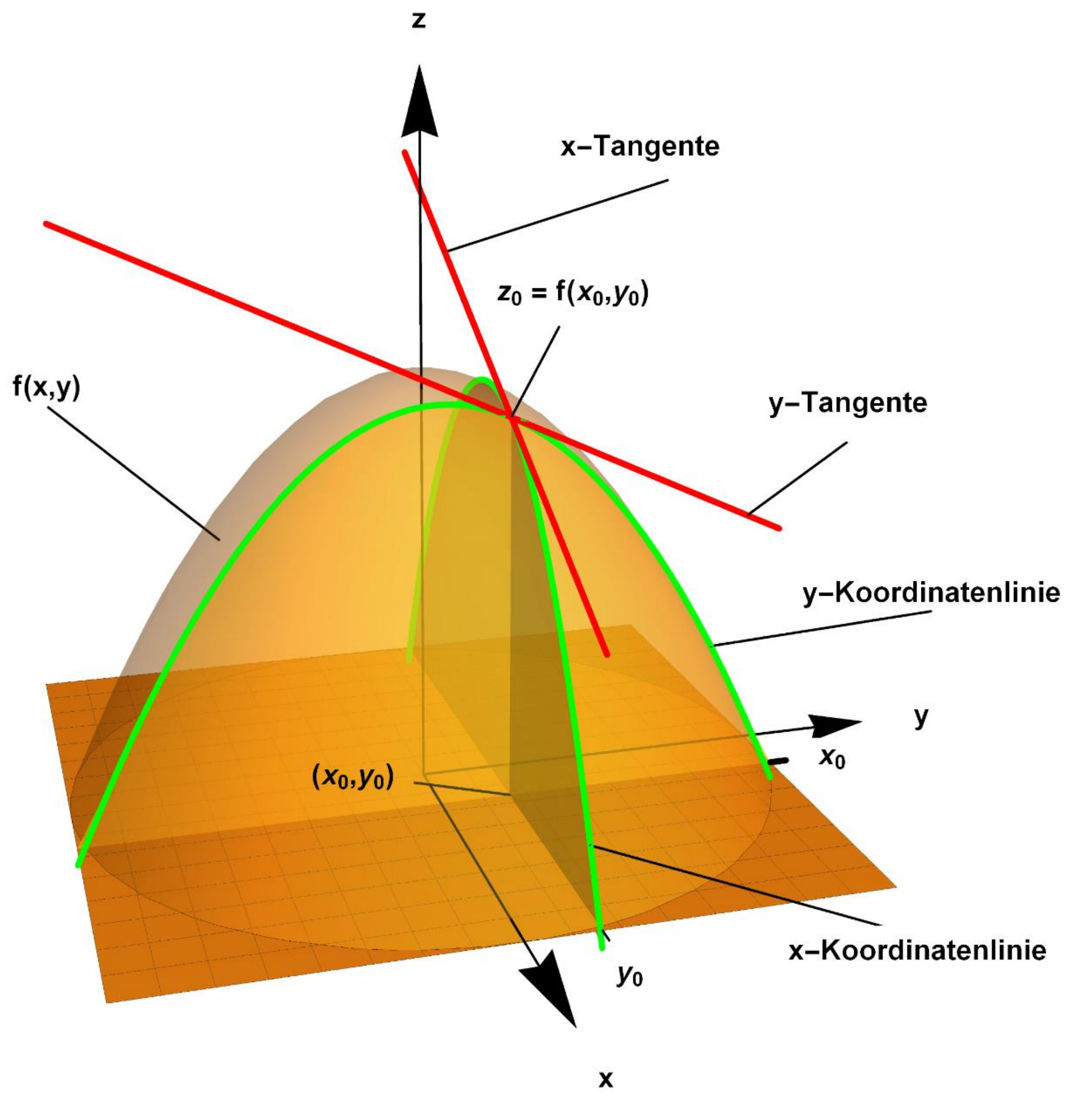
Differentialrechnung im Mehrdimensionalen

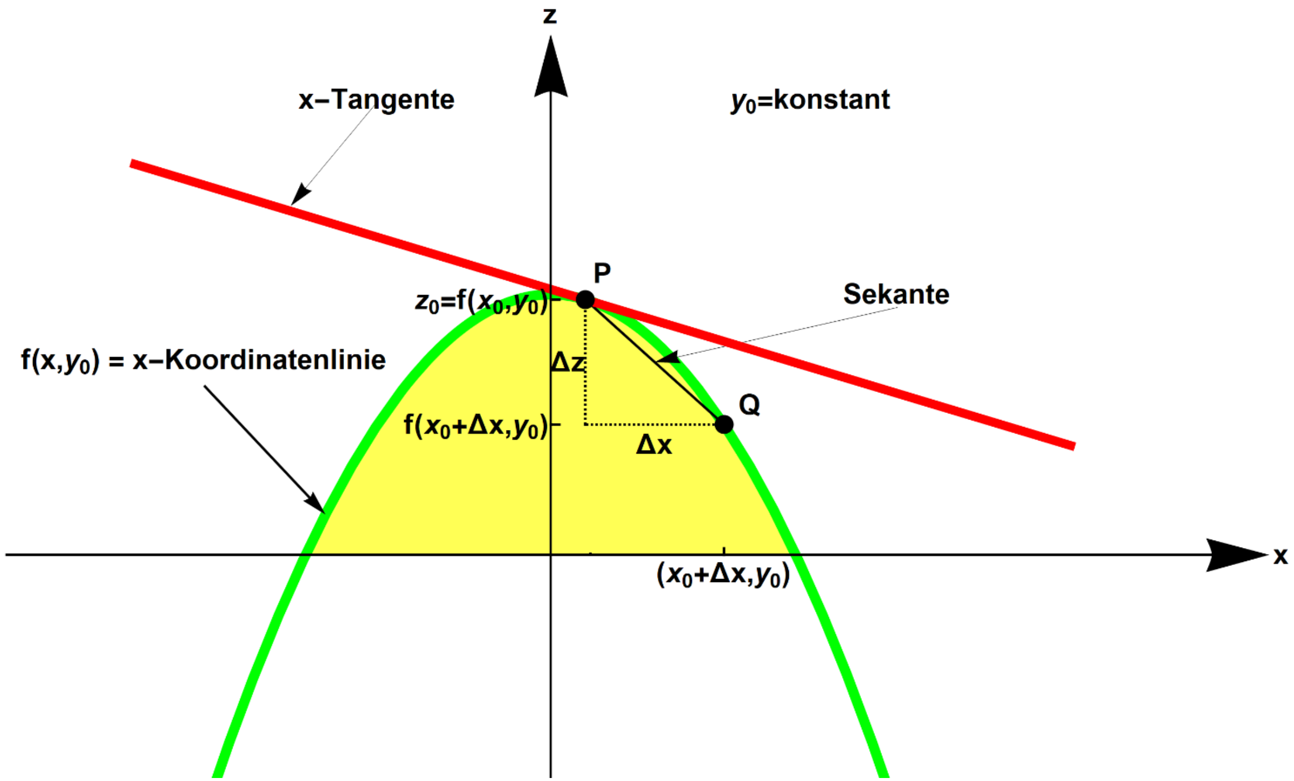
2. Teil

Partielle Ableitungen

Fläche mit Koordinatenschnittlinien und Tangenten



Schnittfläche zur Bestimmung der partiellen Ableitung in *x*-Richtung



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \coloneqq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Definition

Betrachte die Koordinatenlinie durch (x_0, y_0) in *x*-Richtung (d.h. y_0 = konstant). Dann heißt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \coloneqq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

partielle Ableitung erster Ordnung der Funktion f nach x an der Stelle $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$.

Entsprechend heißt (für x_0 = konstant):

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \coloneqq \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

partielle Ableitung erster Ordnung der Funktion f nach y an der Stelle $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$.

Schreibweisen

(„runde“ ∂ !)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = \partial x f(x_0, y_0) = z_x(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = \partial y f(x_0, y_0) = z_y(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Beispiele

Sei

$$f(x, y) = x^3 y\, e^y + \sin(x\, y) + 3y + 2x,$$

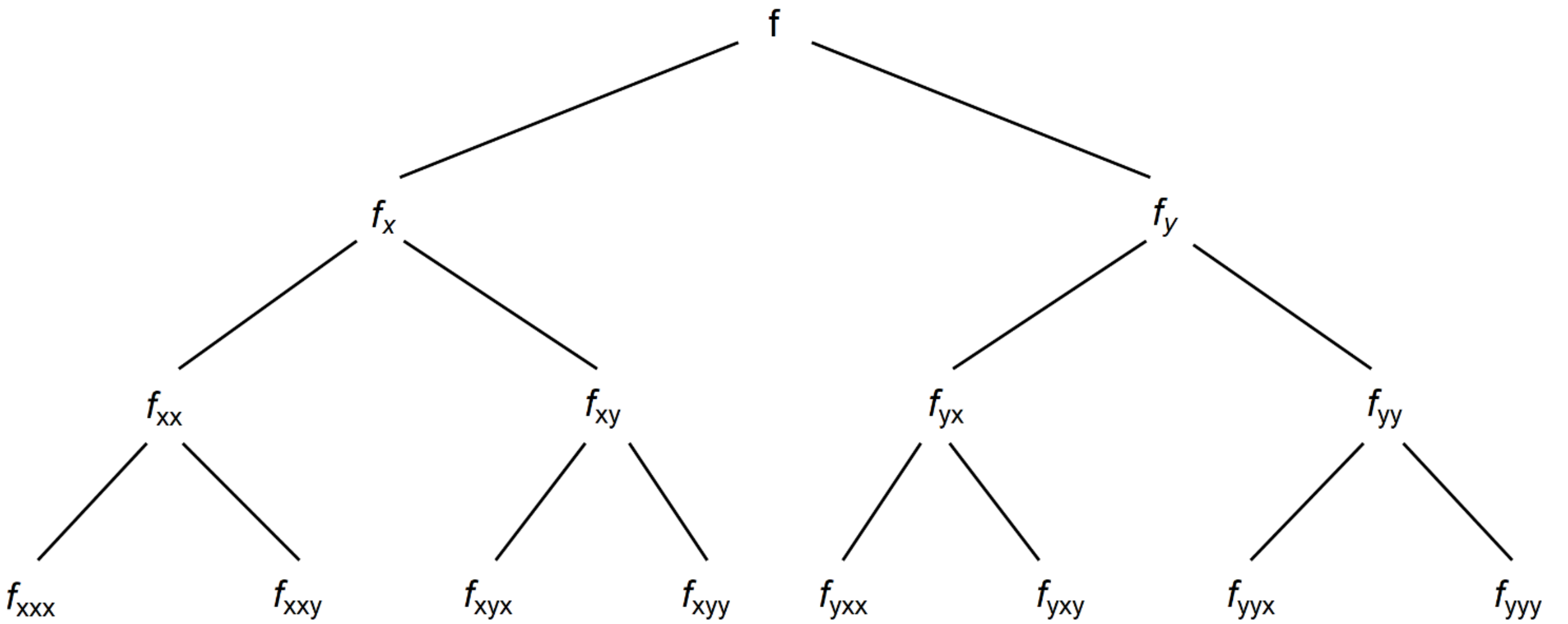
dann ist

$$f_x(x, y) = 3x^2 y e^y + y \cos(xy) + 2 \quad (y = \text{konstant!})$$

und

$$f_y(x, y) = x^3 e^y + x^3 y\, e^y + x \cos(xy) + 3 \qquad (x = \text{konstant!}).$$

Partielle Ableitungen höherer Ordnung



Schreibweisen

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \partial x \partial x f$$

und entsprechend für die gemischten partiellen Ableitungen:

$$f_{\underbrace{xy}_{(*)}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}}_{(*)} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \partial y \partial x f$$

$$f_{\underbrace{yx}_{(*)}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}}_{(*)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \partial x \partial y f$$

(*) Beachte die Schreibweise: Umkehrung der Reihenfolge von *xy*!

Beispiele

Sei

$$f(x,y) = \ln\left(1 + x^2 + y^4\right)$$

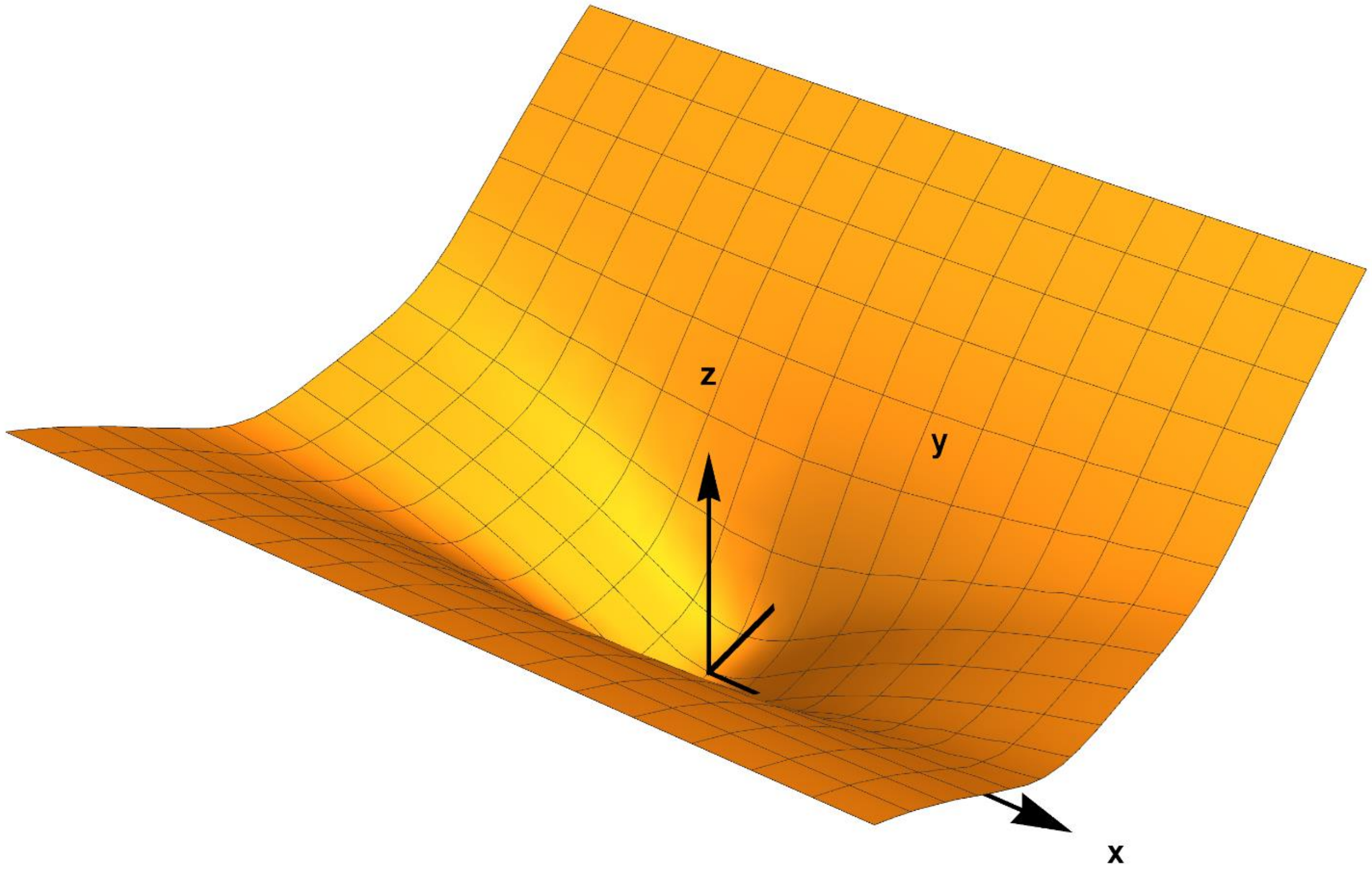
Dann ist

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{(1+x^2+y^4)} \qquad \text{und} \qquad f_y(x,y) = \frac{4y^3}{(1+x^2+y^4)}\ .$$

Weiterhin gilt

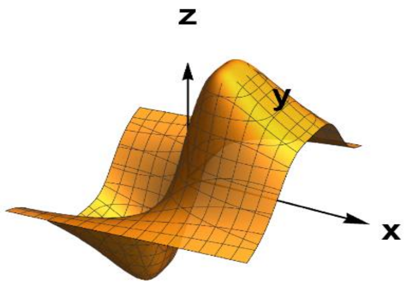
$$f_{xy}(x,y) = \frac{8xy^3}{(1+x^2+y^4)^2} \qquad = \qquad f_{yx}(x,y) = \frac{8xy^3}{(1+x^2+y^4)^2},$$

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^4)$$

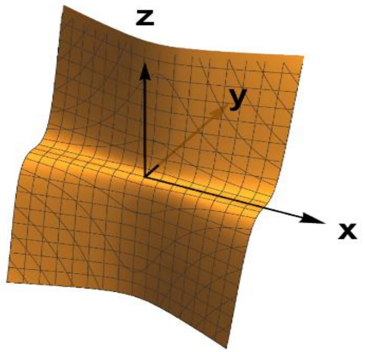


Dann ist

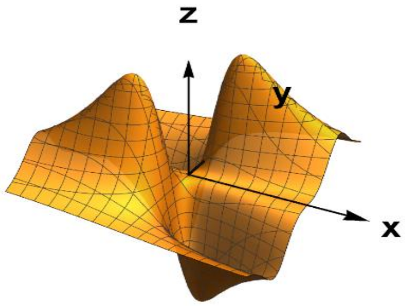
$\partial_x f(x,y)$



$\partial_y f(x,y)$

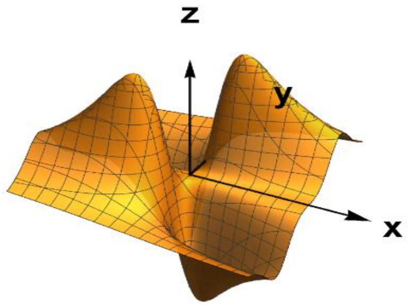


$\partial_{xy} f(x,y)$



=

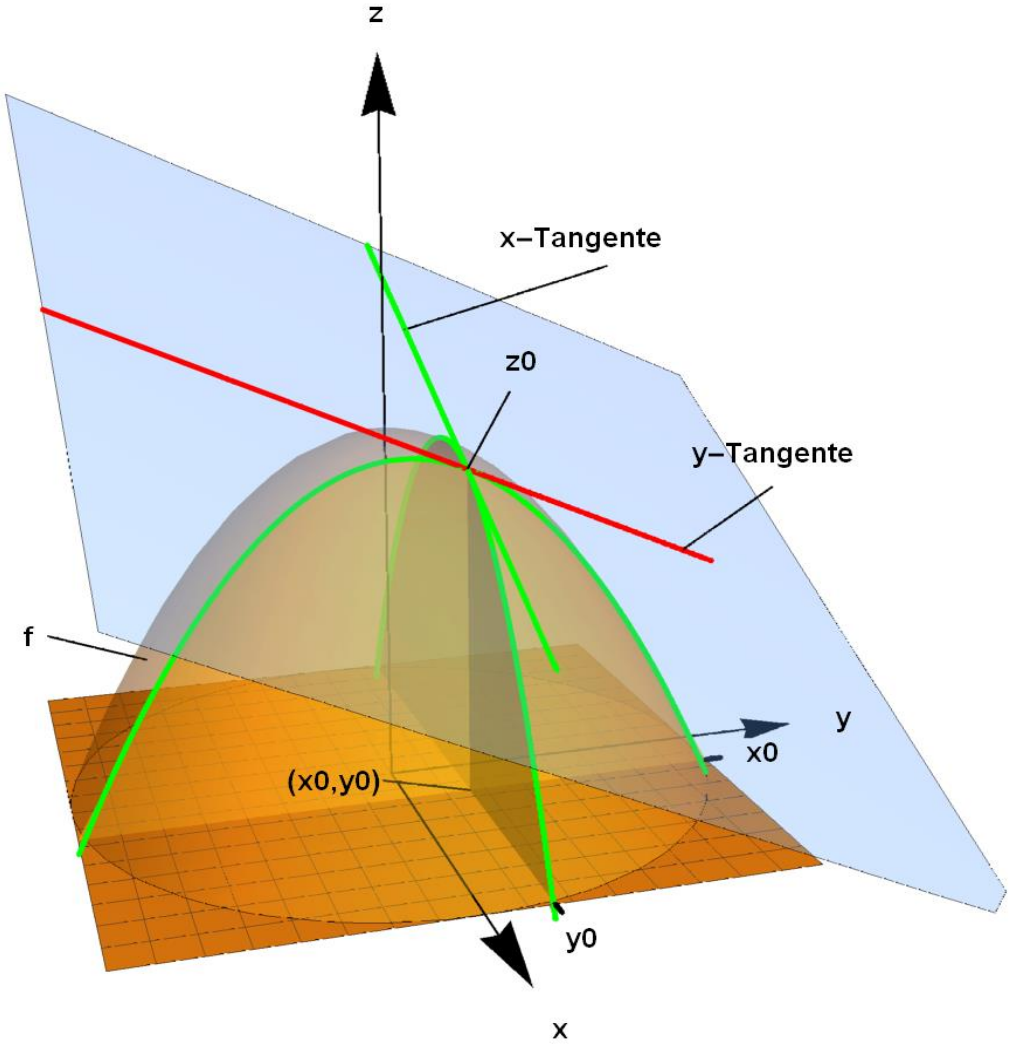
$\partial_{yx} f(x,y)$



Satz von Schwarz

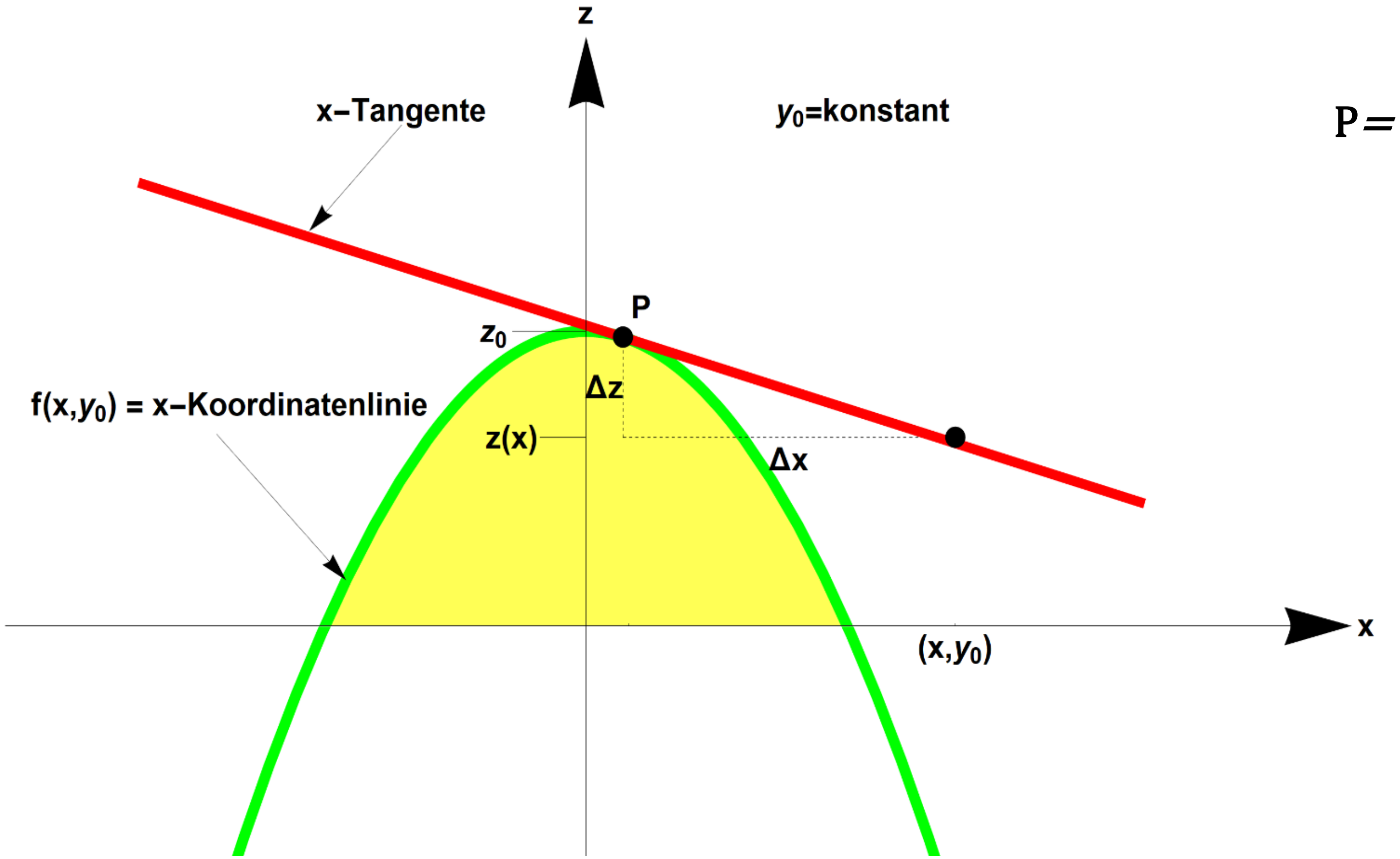
Die Reihenfolge der Differentiationen ist vertauschbar, wenn die „gemischten" Ableitungen existieren und stetig sind.

Fläche mit Tangentialebene



https://drive.google.com/file/d/1OWtGo_o9SQEpQjgYjEaMWTAGDWFPG3WW/view?usp=sharing

Tangentensteigung der Schnittkurve y = $\mathbf{y_0}$



$\mathrm{P} = (x_0, y_0)$

$f_x(x_0, y_0)$ **= partielle Ableitung als Steigung einer Koordinatenschnittlinie**

Tangentengleichungen

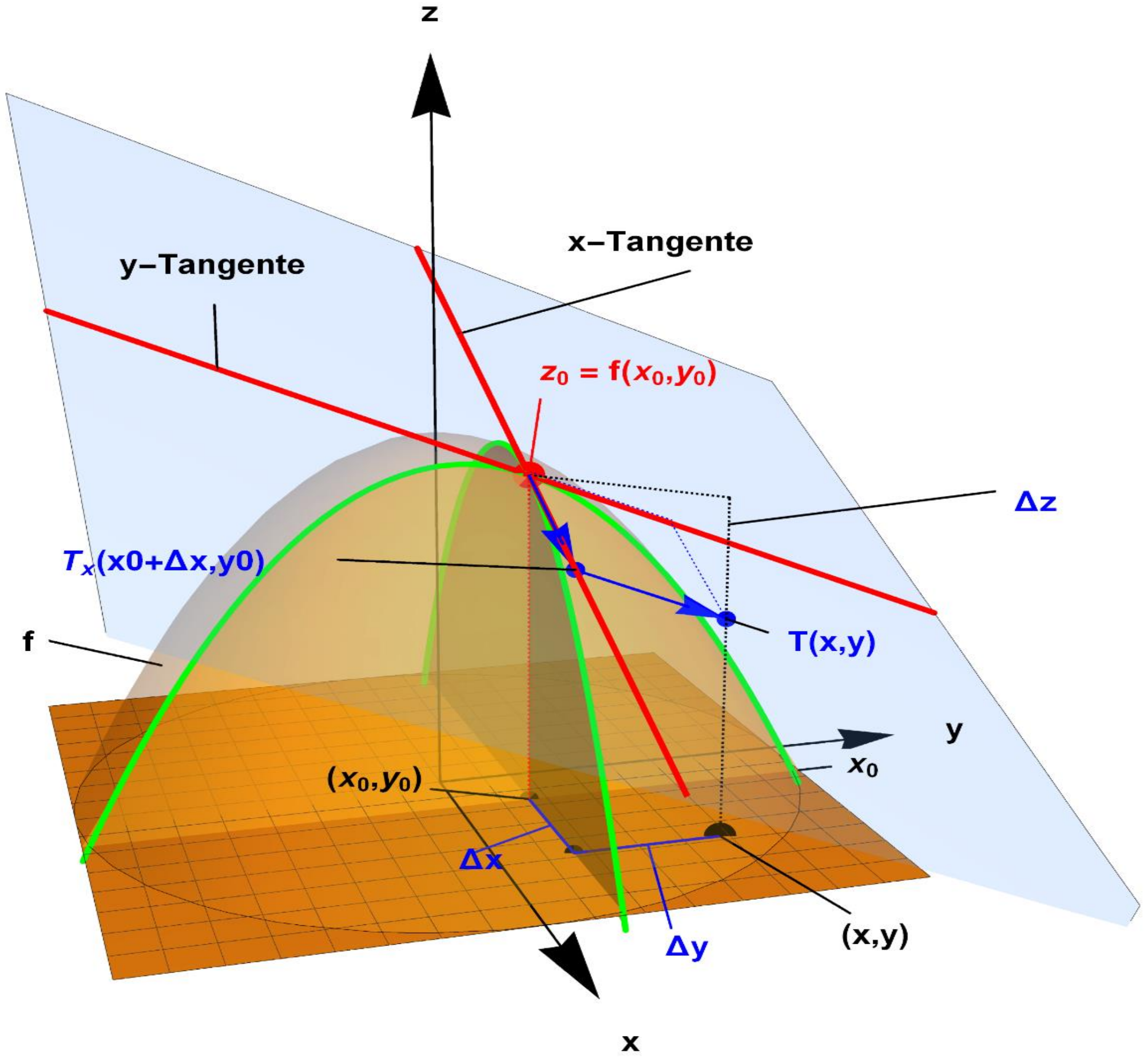
Tangente in x-Richtung

$$T_x(x) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z_0$$

Tangente in y-Richtung:

$$T_y(y) = f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z_0$$

Gleichung der Tangentialebene



Gleichung der Tangentialebene

Die Ebene

$$T(x, y) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

heißt

Tangentialebene T(x,y) von f an der Stelle $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$.