5 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

In diesem Kapitel werden Eigenschaften von Funktionen analysiert. Es stellt sich die Frage, wie sich Funktionen verhalten, wenn man in ihrem Definitionsbereich konvergente Folgen betrachtet.

Wenn die Grenzwerte von Funktionswerten einer konvergenten Folge existieren, ist die Funktion an diesen Grenzwertstellen „gutartig“, das heißt, es gibt keine Sprünge und keine Oszillationen. Kleine Änderungen des Arguments einer solchen Funktion führen zu kleinen Änderungen des Funktionswertes. Formal kann man dann die Grenzwertbildung und die Anwendung der Funktion vertauschen. Dies führt zum Begriff der Stetigkeit einer Funktion.

5.1 Grenzwerte von Funktionen

Wir betrachten eine Funktion f mit Definitionsbereich D_f und eine Folge $\{x_n\}_{n\in N} \subset D_f$, die einen Grenzwert $x_0 \in \mathbb{R}$ hat. Wie verhalten sich die Funktionswerte $\{f(x_n)\}_{n\in N}$?

Das hängt von den Eigenschaften ab, die die Funktion an der Stelle x_0 hat.

Man unterscheidet drei Fälle:

Definitionen 5.1:

Sei f eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$.

(1) Dann **hat *f* an der Stelle** x_0 **den Grenzwert** g, wenn gilt:

Für **jede** Folge $\{x_n\}_{n \in N} \subset D_f$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n) = x_0$ konvergieren die Funktionswerte $\{f(x_n)\}_{n \in N}$ gegen den Grenzwert g, d.h.

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g.$$

Schreibweise: $$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$$

Sei f eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$.

(2) Wenn speziell für die Folgen $\{x_n\}_{n\in N} \subset D_f$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ gilt: $x_n < x_0$ und $\{f(x_n)\}_{n\in N}$ konvergiert, dann heißt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) =: g_L \text{ \textbf{\textit{linksseitiger Grenzwert.}}}$$

Schreibweise: $$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) =: g_L$$

oder kurz

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) =: g_L$$

Sei f eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$.

(3) Wenn speziell für die Folgen $\{x_n\}_{n\in N} \subset D_f$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ gilt: $x_0 < x_n$ und $\{f(x_n)\}_{n\in N}$ konvergiert, dann heißt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) =: g_R$$ ***rechtsseitiger Grenzwert.***

Schreibweise:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) =: g_R$$

oder kurz

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) =: g_R$$

Bemerkung 5.1:
Es gibt dann folgende Fälle:

(1) Wenn gilt $g_L \neq g_R$, dann hat f keinen Grenzwert bei x_0
(s. Beispiel 5.1& Abb. 5.1).

Bemerkung 5.1:
Es gibt dann folgende Fälle:

(1) Wenn gilt $g_L \neq g_R$, dann hat f keinen Grenzwert bei x_0
(s. Beispiel 5.1& Abb. 5.1).

(2) Wenn gilt $x_0 \in D_f$, dann kann gelten

$$f(x_0) \neq g_L \neq g_R ,$$

das heißt, der Funktionswert sowie die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an der Stelle x_0 sind alle verschieden (s. Abb. 5.1).

Bemerkung 5.1:
Es gibt dann folgende Fälle:

(1) Wenn gilt $g_L \neq g_R$, dann hat f keinen Grenzwert bei x_0 (s. Beispiel 5.1& Abb. 5.1).

(2) Wenn gilt $x_0 \in D_f$, dann kann gelten

$$f(x_0) \neq g_L \neq g_R ,$$

das heißt, der Funktionswert sowie die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an der Stelle x_0 sind alle verschieden (s. Abb. 5.1).

(3) Wenn f einen Grenzwert g bei x_0 hat, genau dann gilt

$$g_L = g_R = g.$$

Beispiel 5.1: Funktion mit verschiedenem links- und rechtsseitigem Grenzwert $\neq$ Funktionswert (s. Abb. 5.1)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2} - 1 & \text{für} \quad x \in (-\infty, 2) \\ 4.5 & \text{für} \quad x = 2 \\ \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2} + 2 & \text{für} \quad x \in (2, \infty) \end{cases}$$

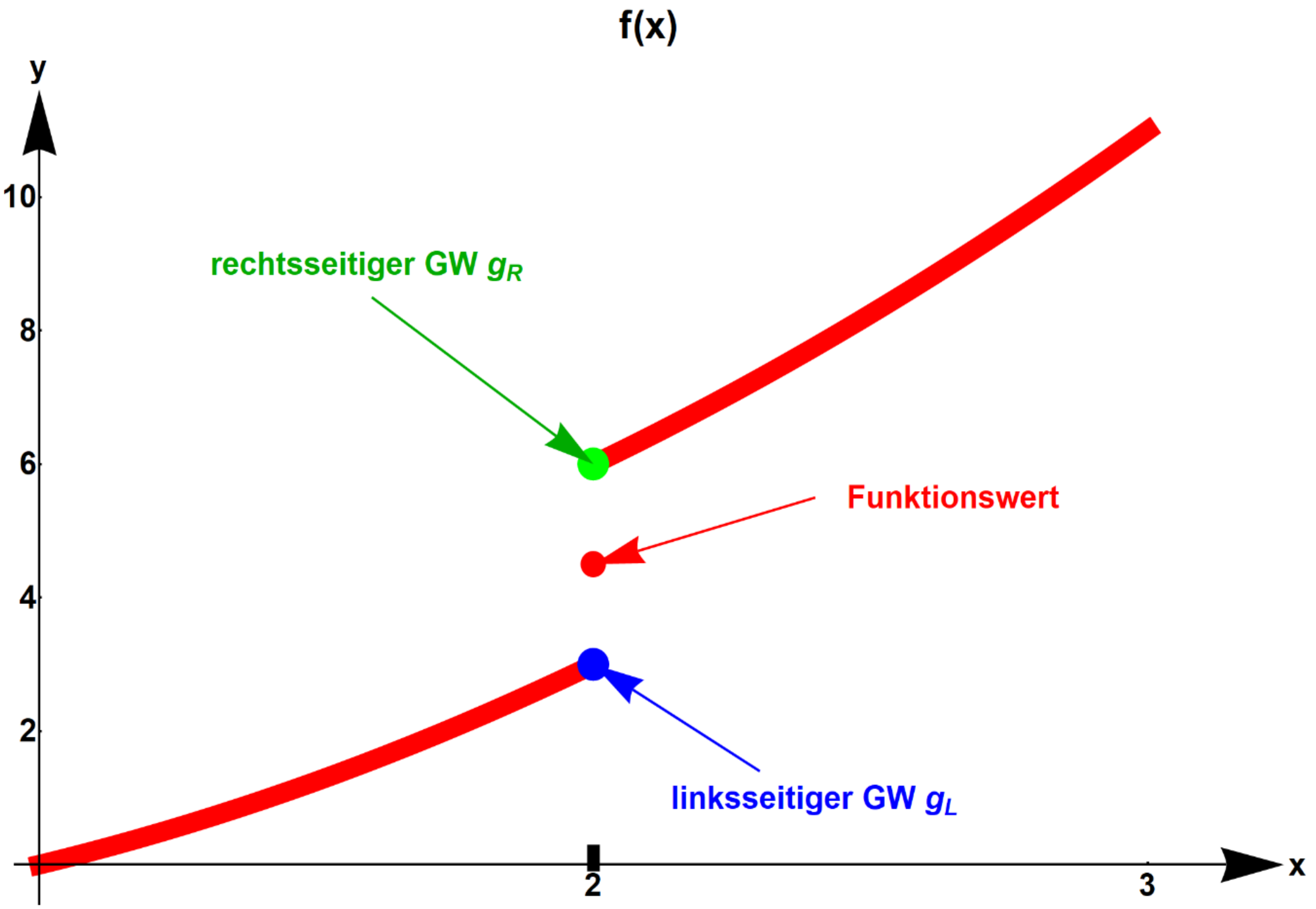

Abb. 5.1. Funktion mit links- und rechtsseitigem Grenzwert (GW) ≠ Funktionswert

Wenn f einen Grenzwert g besitzt können wiederum 3 Fälle auftreten:

(3.1) $x_0 \in \mathbb{R}$ muss nicht in D_f liegen, trotzdem kann der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

existieren (Definitionslücke, s. Beispiel 5.2 & Abb.5.2).

(3.2) Wenn gilt $x_0 \in D_f$, dann kann gelten

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g, \text{ aber } f(x_0), \neq g,$$

(3.3) Wenn f einen Grenzwert g bei x_0 hat und $g = f(\,x_0)$, dann ist f stetig an der Stelle x_0 .

zu (3.1):

Beispiel 5.2: Funktion mit Definitionslücke (s. Abb. 5.2)

Sei

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}, x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\},$$

dann gilt

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4, \text{aber } 2 \notin D_f.$$

zu (3.1):

Beispiel 5.2: Funktion mit Definitionslücke (s. Abb. 5.2)

Sei

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2}{x-2},\ x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\},$$

dann gilt

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4, \text{aber } 2 \notin D_f.$$

Die Funktion ist an der Stelle $x = 2$ nicht definiert. Dennoch existiert der Grenzwert:

$$g = \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

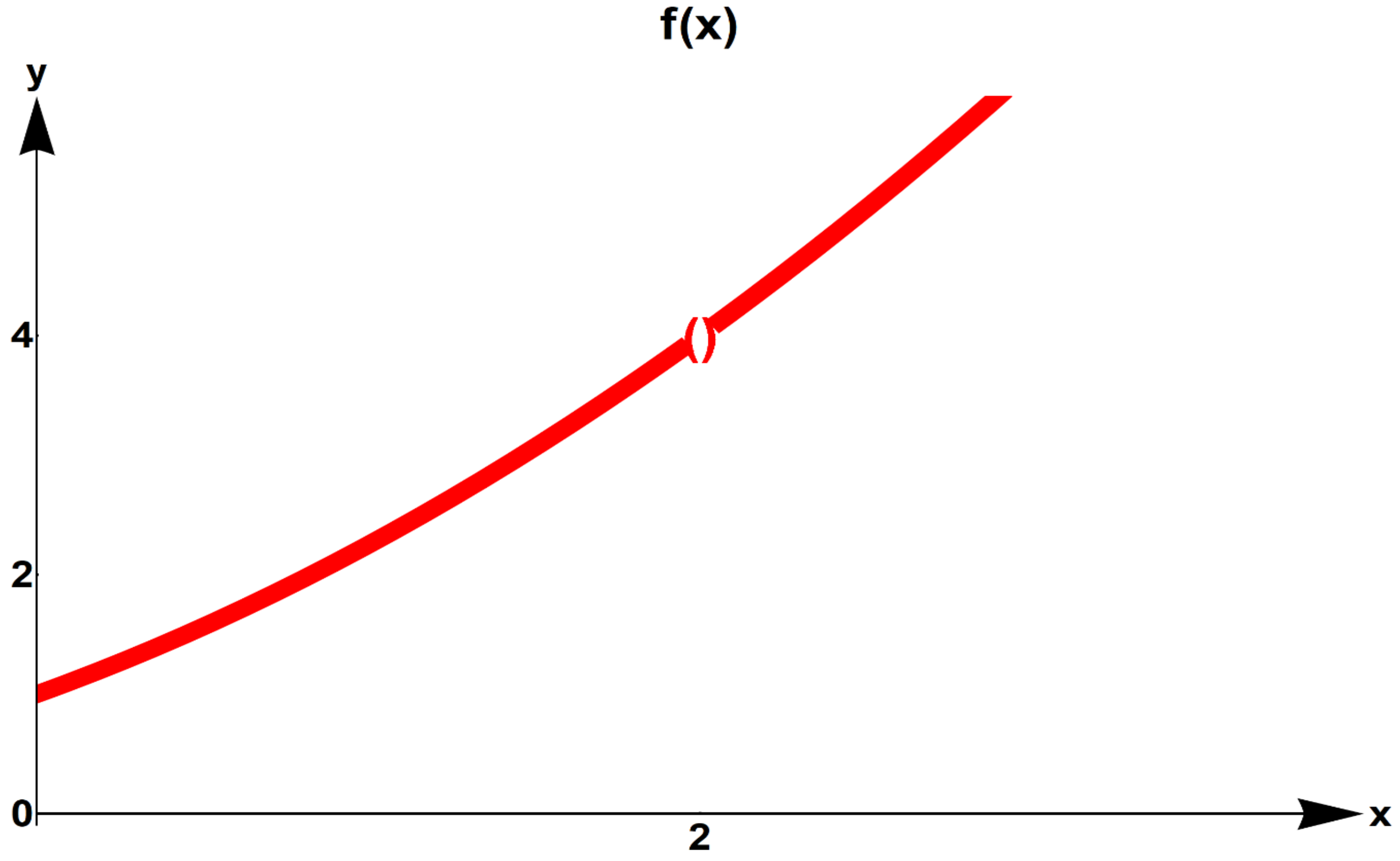

Abb. 5.2. Funktion mit Grenzwert g = 4 und Definitionslücke bei x=2

zu (3.2)
Wenn gilt $x_0 \in D_f$, dann kann gelten

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g, \text{ aber } f(x_0), \neq g,$$

das heißt also :

Es kann gelten **Grenzwert ≠ Funktionswert** bei x_0.

(s. Beispiel 5.3 & Abb.5.3)

Beispiel 5.3: Funktion mit Stetigkeitslücke (s. Abb. 5.3)

Sei

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2} & f\text{ür } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ 0 & f\text{ür } x = 2, \end{cases}$$

Beispiel 5.3: Funktion mit Stetigkeitslücke (s. Abb. 5.3)

Sei

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2} & f\ddot{u}r\ x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ 0 & f\ddot{u}r\ x = 2, \end{cases}$$

dann gilt

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4, \text{aber } f(2) = 0,$$

$$\text{also } \lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2).$$

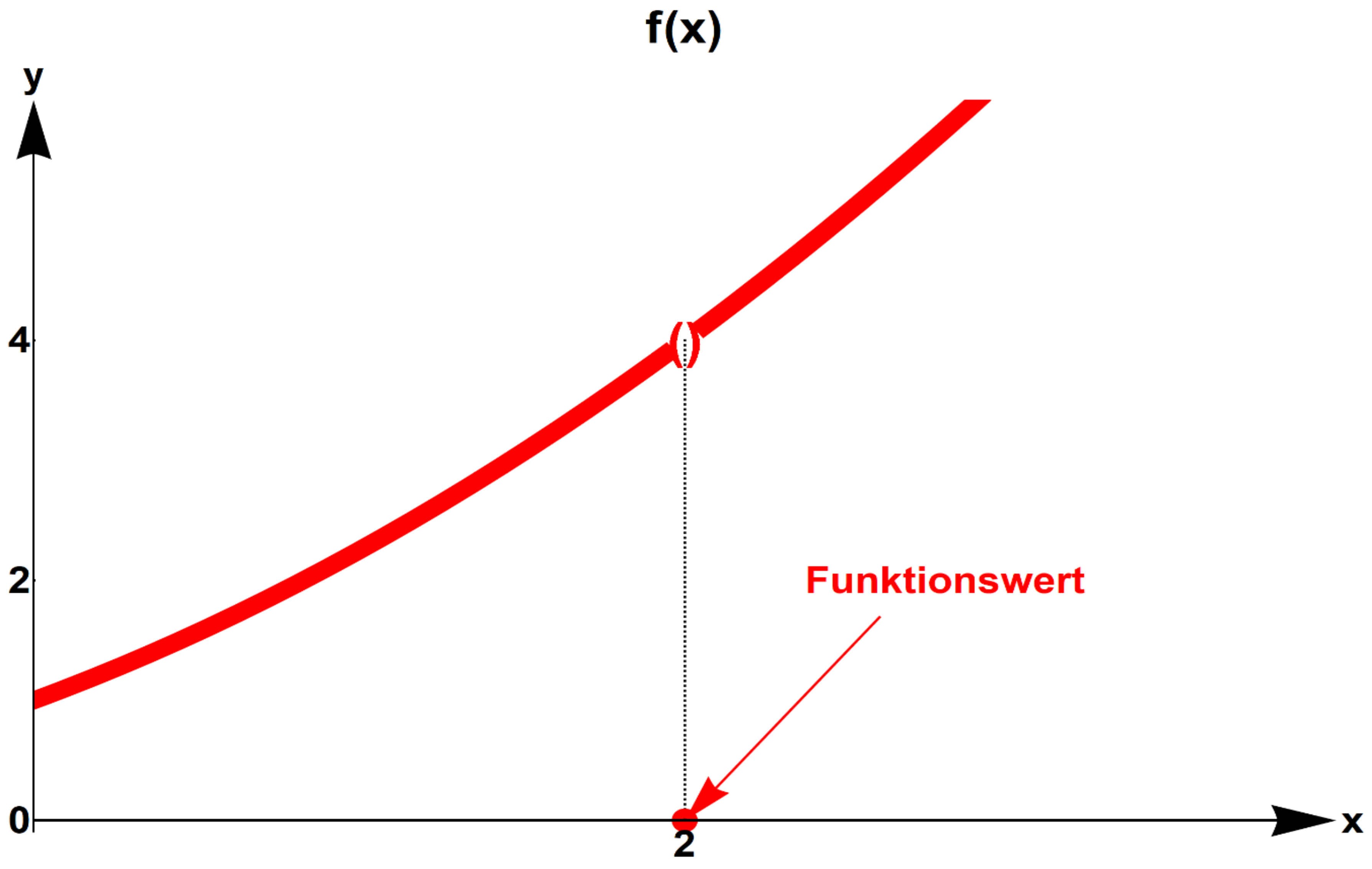

Abb. 5.3. Funktion mit Stetigkeitslücke bei x=2 und $g \neq f(2)=0$

zu (3.3): Wenn f einen Grenzwert g bei x_0 hat und $g = f(x_0)$, dann ist f stetig an der Stelle x_0 .

5.2 Stetigkeit

Definition 5.2:

(1) Eine Funktion f ist ***stetig an der Stelle*** $x_0 \in D_f$, wenn für alle Folgen $\{x_n\}_{n\in N} \subset D_f$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$ existiert und es gilt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g = f(x_0)$$

(2) Eine Funktion f ist ***stetig,*** wenn sie stetig ist für alle $x \in D_f$.

Merkregel:

- Wenn eine Funktion f stetig ist an der Stelle x_0, kann man den Grenzübergang „unter die Funktion ziehen“:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$$

- Man sagt dann, die Funktion und die Grenzwertbildung können vertauscht werden.

Bemerkung:

Die Funktion in Abb. 5.3 ist **nicht** stetig, dagegen ist die Funktion in Abb. 5.2 stetig ergänzbar (s. Beispiel 5.5).

Beispiel 5.4: Die Funktion

$$f_1(x) = x^2, \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ ist } \textbf{stetig},$$

Beispiel 5.4: Die Funktion

$$f_1(x) = x^2, \quad f\text{ür } x \in \mathbb{R} \text{ ist } \textbf{stetig},$$

aber

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & f\text{ür } x \leq 2 \\ x^2 - 1 & f\text{ür } x > 2 \end{cases} \quad \text{ist } \textbf{nicht stetig}$$

(s. Abb. 5.4).

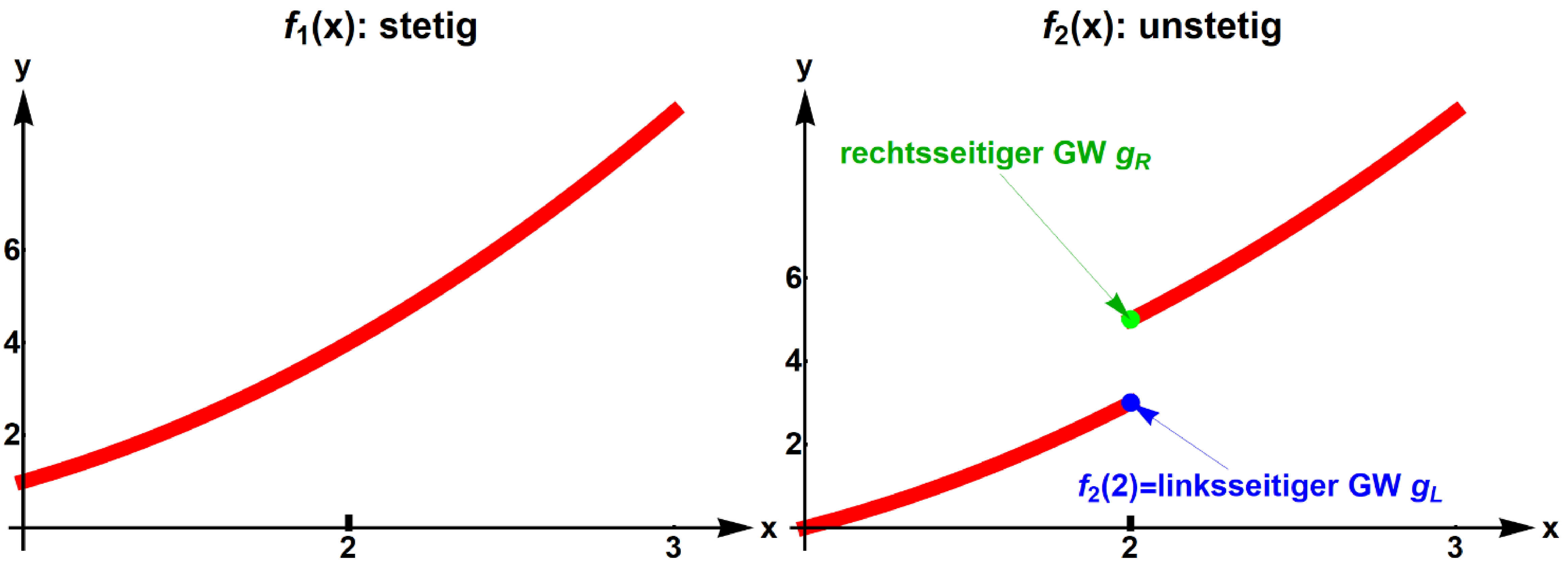

Abb. 5.4. Stetige Funktion f1 und nicht stetige Funktion f2

Beispiel 5.5: Stetige Erweiterung (s. Abb. 5.5)

Sei

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ 4 & \text{für } x = 2, \end{cases}$$

Beispiel 5.5: Stetige Erweiterung (s. Abb. 5.5)

Sei

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2} & für\ x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ 4 & für\ x = 2, \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig, weil gilt

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 4.$$

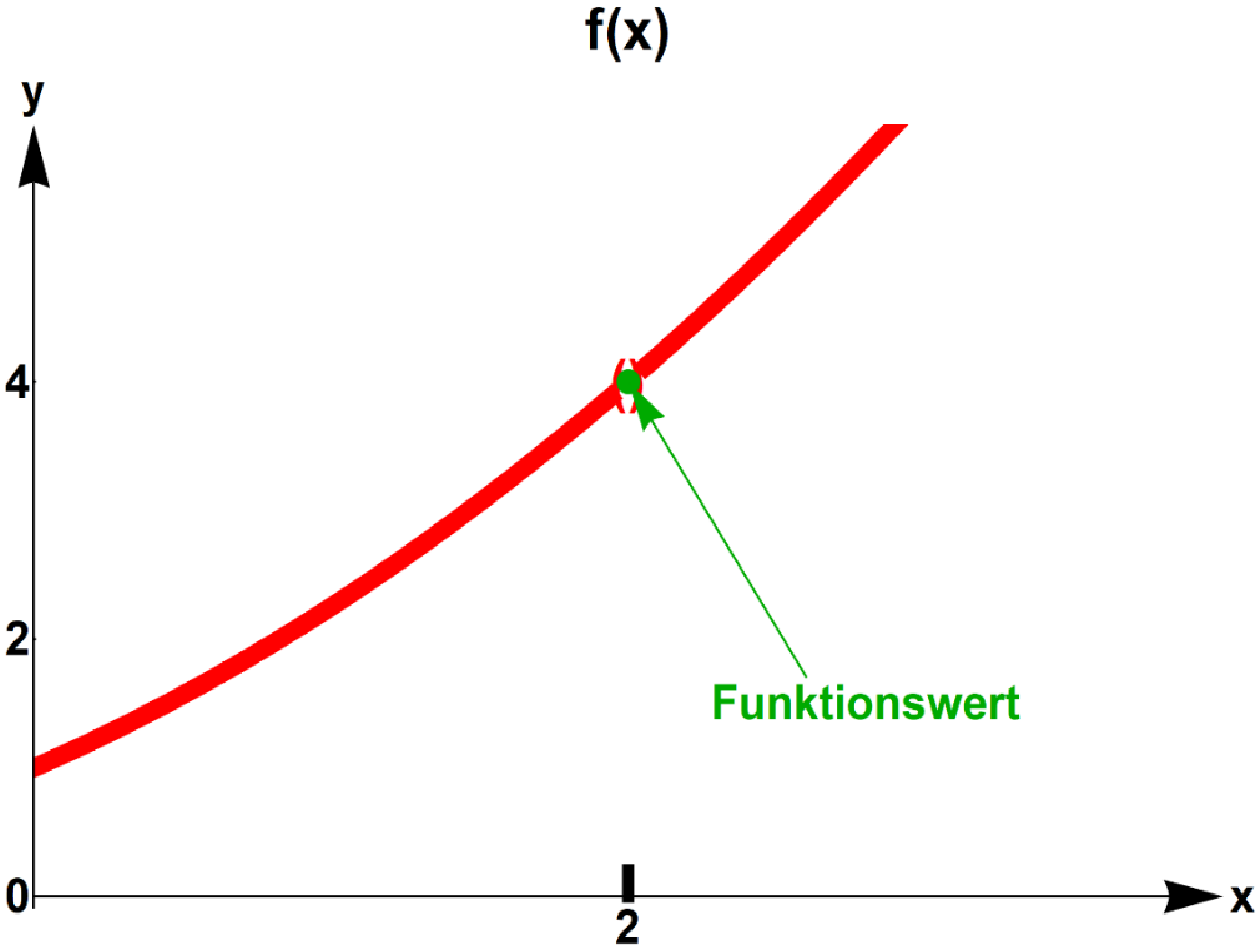

Abb. 5.5. stetige Funktion und stetige Erweiterung bei x = 2 und g = f(2) = 4

Weitere Beispiele für stetige Funktionen:

Beispiel 5.6:

- Polynome $P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$, $x \in \mathbb{R}$ sind stetig.

Weitere Beispiele für stetige Funktionen:

Beispiel 5.6:

- Polynome $P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$, $x \in \mathbb{R}$ sind stetig.
- Die trigonometrischen Funktionen sin x, cos x , tan x, cot x und ihre Umkehrfunktionen sind stetig. Die Polstellen sind nicht im Definitionsbereich!

Weitere Beispiele für stetige Funktionen:

Beispiel 5.6:

- Polynome $P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$, $x \in \mathbb{R}$ sind stetig.
- Die trigonometrischen Funktionen sin x, cos x , tan x, cot x und ihre Umkehrfunktionen sind stetig. Die Polstellen sind nicht im Definitionsbereich!
- Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen sind stetig.

Weitere Beispiele für stetige Funktionen:

Beispiel 5.6:

- Polynome $P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$, $x \in \mathbb{R}$ sind stetig.
- Die trigonometrischen Funktionen sin x, cos x , tan x, cot x und ihre Umkehrfunktionen sind stetig. Die Polstellen sind nicht im Definitionsbereich!
- Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen sind stetig.
- Die Areafunktionen sinh x, cosh x, tanh x, coth x und ihre Umkehrfunktionen sind stetig.

Weitere Beispiele für stetige Funktionen:

Beispiel 5.6:

- Polynome $P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$, $x \in \mathbb{R}$ sind stetig.
- Die trigonometrischen Funktionen sin *x*, cos *x* , tan *x*, cot *x* und ihre Umkehrfunktionen sind stetig. Die Polstellen sind nicht im Definitionsbereich!
- Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen sind stetig.
- Die Areafunktionen sinh *x*, cosh *x*, tanh *x*, coth *x* und ihre Umkehrfunktionen sind stetig.
- Die Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x-2}$, $x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}\}$ ist stetig,

  hat aber eine Definitionslücke bei $x = 2$, s. Beispiel (5.2). Durch zusätzliche Definition von *f* durch $f(2) = 4$ erhält man eine ***stetige Erweiterung*** von *f*, s. Beispiel (5.5).

Bemerkung 5.2:

Es gibt noch eine andere Formulierung der Stetigkeit, die unabhängig von Grenzwerten ist.

Die Funktion f ist an der Stelle $x_0 \in D_f$ stetig, wenn gilt:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in D_f} (|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Wenn D_f keine „isolierten Punkte“ hat, ist diese Formulierung äquivalent mit Definition 5.2 .

Das heißt also:
Für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ in der y-Achse gibt es ein $\delta > 0$ in der x-Achse, sodass für alle $x \in D_f$ mit

$$|x - x_0| < \delta \qquad \text{folgt:} \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Das heißt, der Funktionswert $f(x)$ liegt „beliebig nahe“ bei $f(x_0)$, wenn nur x „genügend nahe“ bei x_0 liegt.

Dieser Stetigkeitsbegriff könnte auch wie ein Spiel zwischen zwei Spielern erklärt werden:

Spieler 1 gibt auf der y-Achse eine beliebig kleine ε -Umgebung $U_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$ von $f(x_0)$ vor.

Wenn der Spieler 2 für ***jedes*** dieser $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ auf der x-Achse findet, sodass gilt:

für alle x in $U_\delta(x_0)$ ist $f(x)$ in $U_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$,

dann kann der Spieler 2 behaupten: $\boldsymbol{f}$ **ist stetig** an der Stelle x_0.

Dieser Stetigkeitsbegriff könnte auch wie ein Spiel zwischen zwei Spielern erklärt werden:

Spieler 1 gibt auf der y-Achse eine beliebig kleine ε -Umgebung $U_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$ von $f(x_0)$ vor.

Wenn der Spieler 2 für ***jedes*** dieser $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ auf der x-Achse findet, sodass gilt:

für alle x in $U_\delta(x_0)$ ist $f(x)$ in $U_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$,

dann kann der Spieler 2 behaupten: $\boldsymbol{f}$ **ist stetig** an der Stelle x_0.

Anschaulich bedeutet die Stetigkeit einer Funktion, dass man den Funktionsgraphen in einem Zug zeichnen kann, ohne abzusetzen

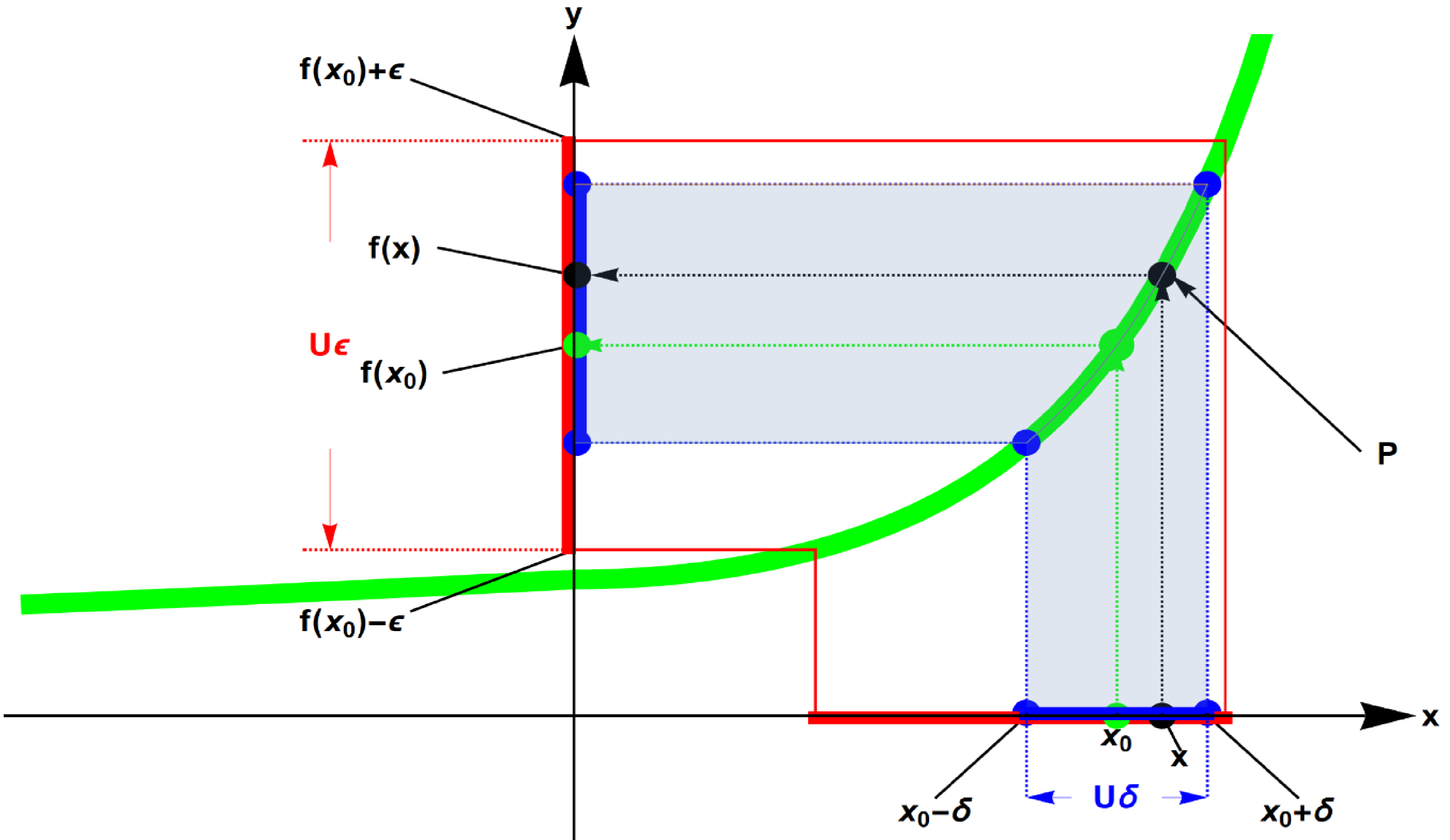

Abb. 5.6. Zur allgemeinen Definition der Stetigkeit. Im Video LINK (Stetigkeit) sieht man, dass es für jede immer kleinere ε-Umgebung $U_\varepsilon(f(x_0))$ immer noch $U_\delta(x_0)$ gibt, sodass $f(U_\delta(x_0))$ enthalten ist in $U_\varepsilon(f(x_0))$.

https://sn.pub/wbNqY2

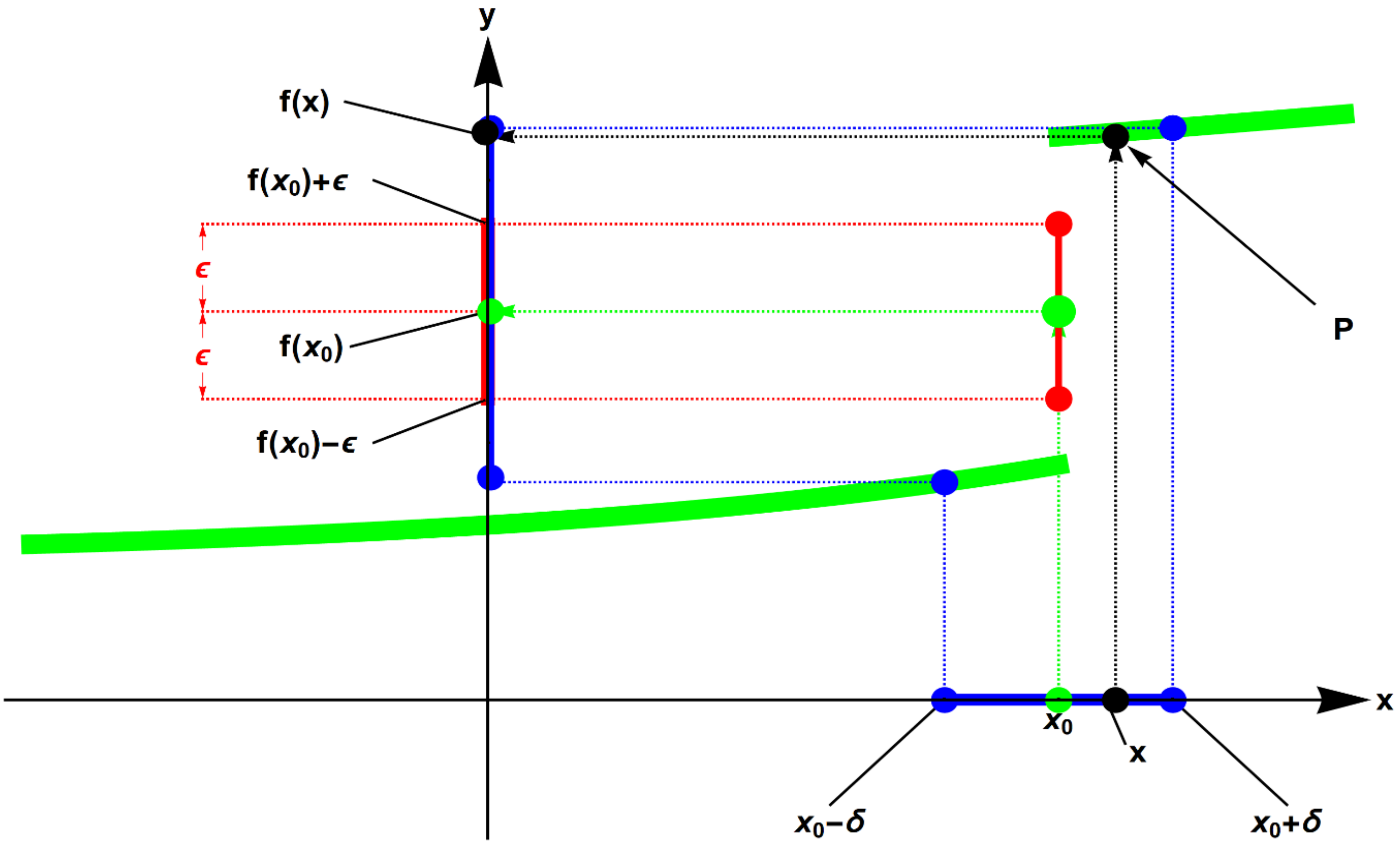

Abb. 5.7. f ist nicht stetig bei x_0 (Sprungstelle bei x_0).

Für das ε in Abb. 5.7 gibt es **kein** $\delta > 0$, sodass für alle $x \in D_f$ gilt:

$$\text{aus } |x - x_0| < \delta \quad \text{folgt } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Das heißt: Wenn die Funktion f einen „Sprung" an der Stelle x_0 hat,

dann gibt es immer ein ε, sodass 2 ε kleiner ist als die „Sprunghöhe".

Damit gibt es für jedes δ immer $x \in D_f$ mit

$$|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon!$$

Ein anderer Typ von ***Unstetigkeit*** entsteht durch ***Oszillation***:

Beispiel 5.7:

Sei $f\,(x) = \sin(1/x)$ (s. Abb. 5.8).

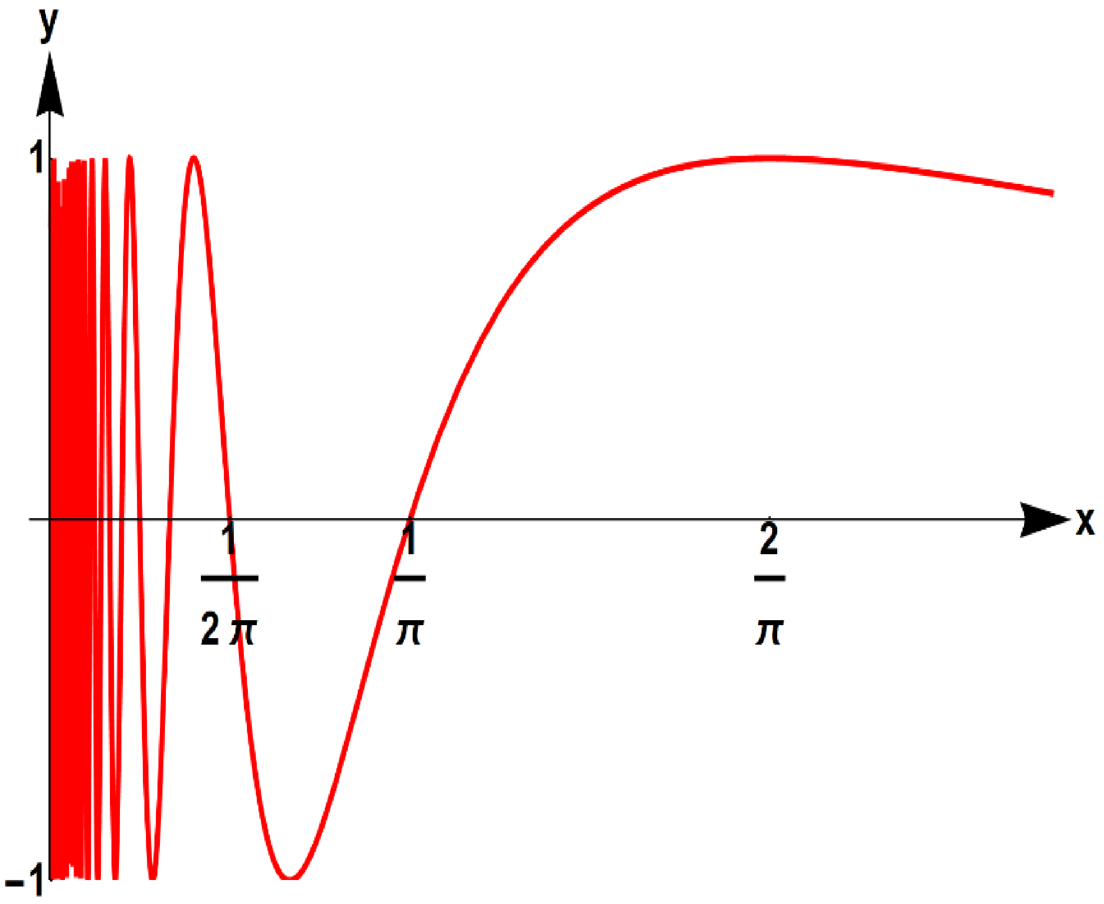

Abb. 5.8. *f* ist nicht stetig bei *x* = 0 (Oszillationen).

Sei $g \in [-1,1]$ ein beliebiger Wert in $[-1,1]$. Dann gibt es eine Folge

$$x_n = \frac{1}{\arcsin(g)} \text{ mit } f(x_n) = g \text{ und } \lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$$

(s. Abb. 5.9) und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Somit gibt es für jedes beliebige $g \in [-1,1]$ eine (zugehörige)Folge

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$. Damit hat die Funktion f

keinen Grenzwert (im Sinne der Definition 5.1) an der Stelle $x = 0$.

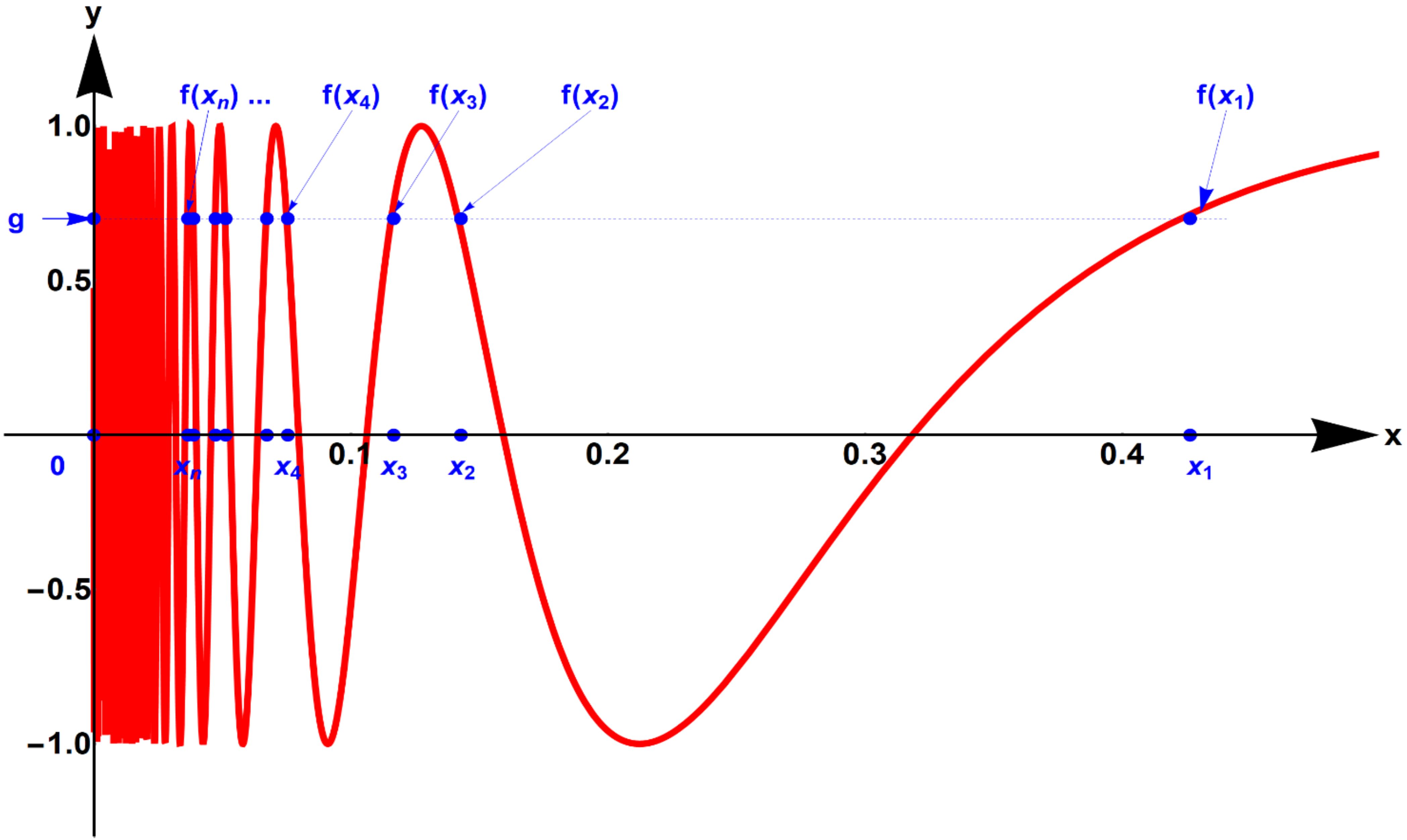

Abb. 5.9. Die Folge $f(x_n)$ konvergiert gegen ein beliebiges $g \in [-1, 1]$.