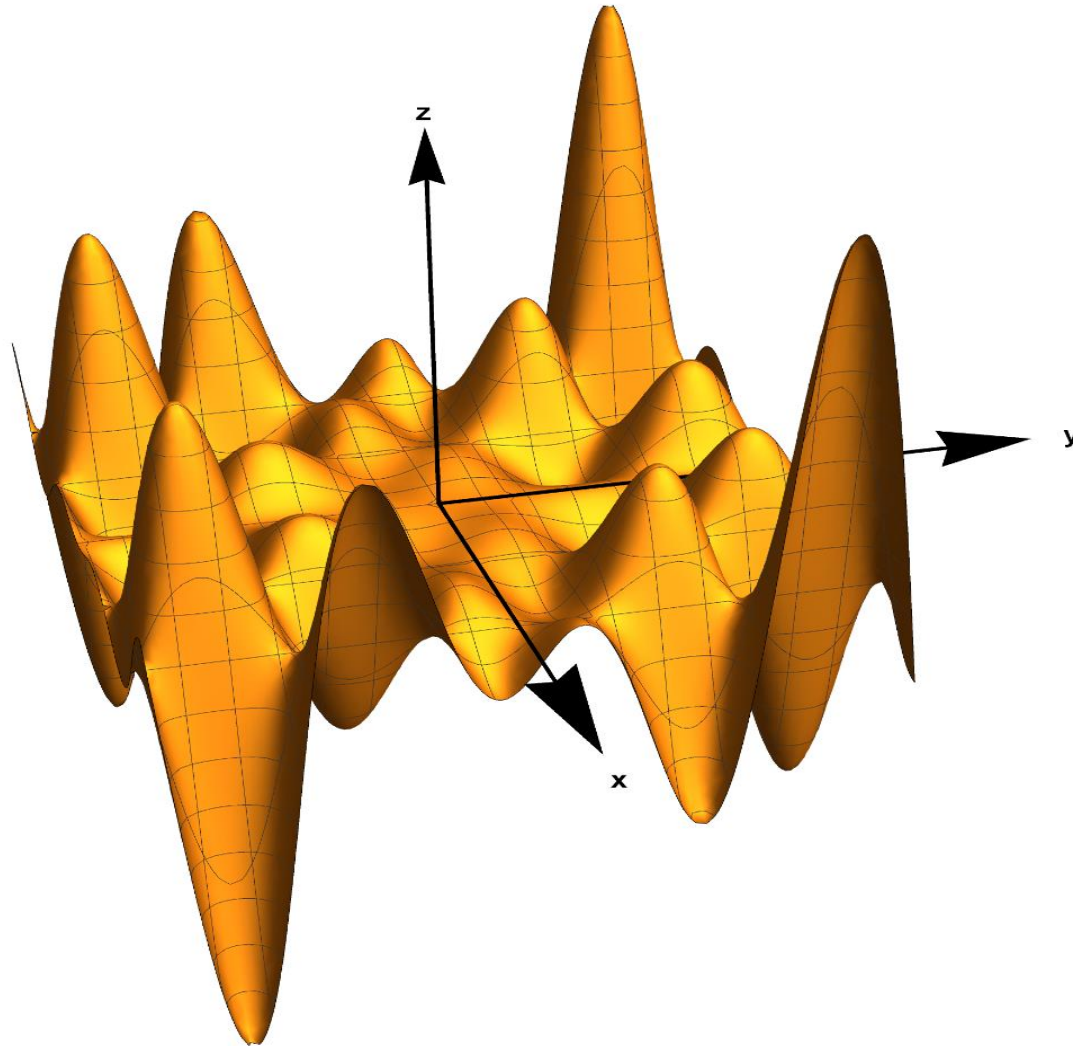


Differentialrechnung im Mehrdimensionalen

4. Teil

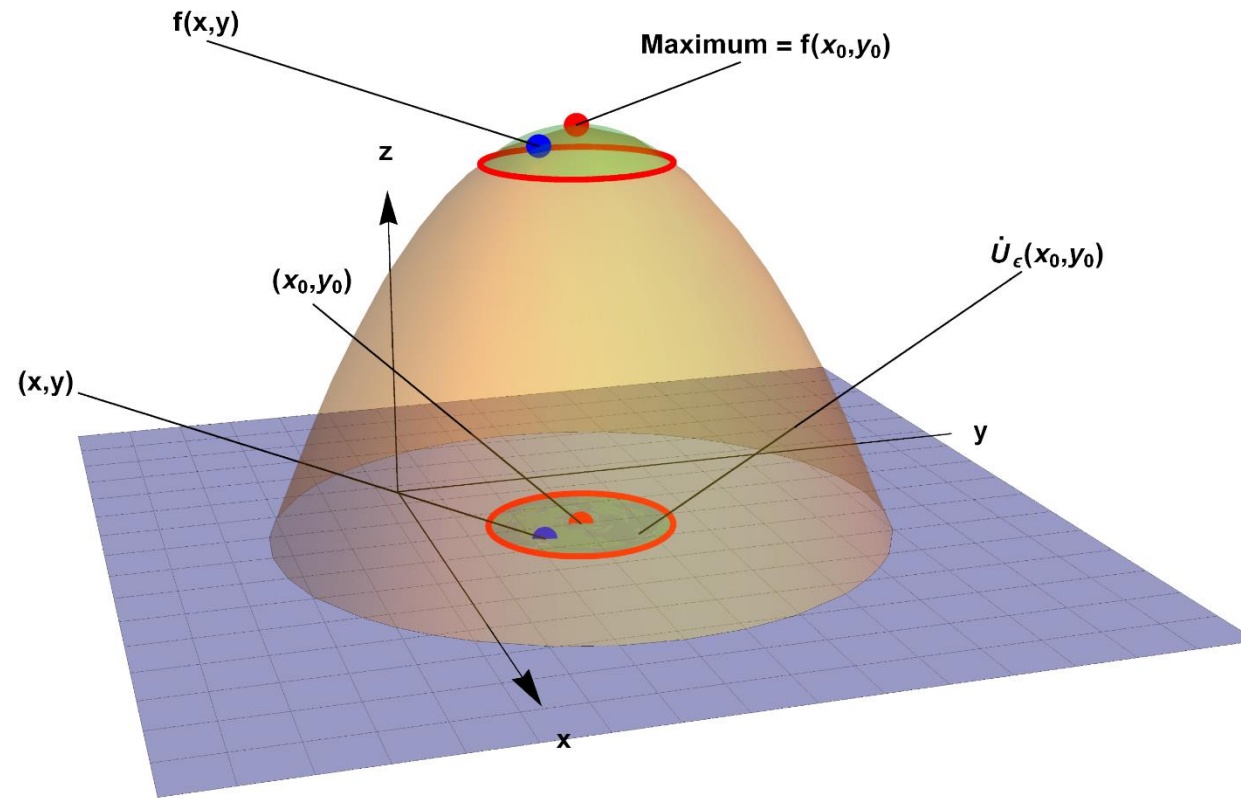
Relative Extremwerte
(Kurvendiskussion in 2D)

Fläche mit unendlich vielen Hoch- und Tiefpunkten



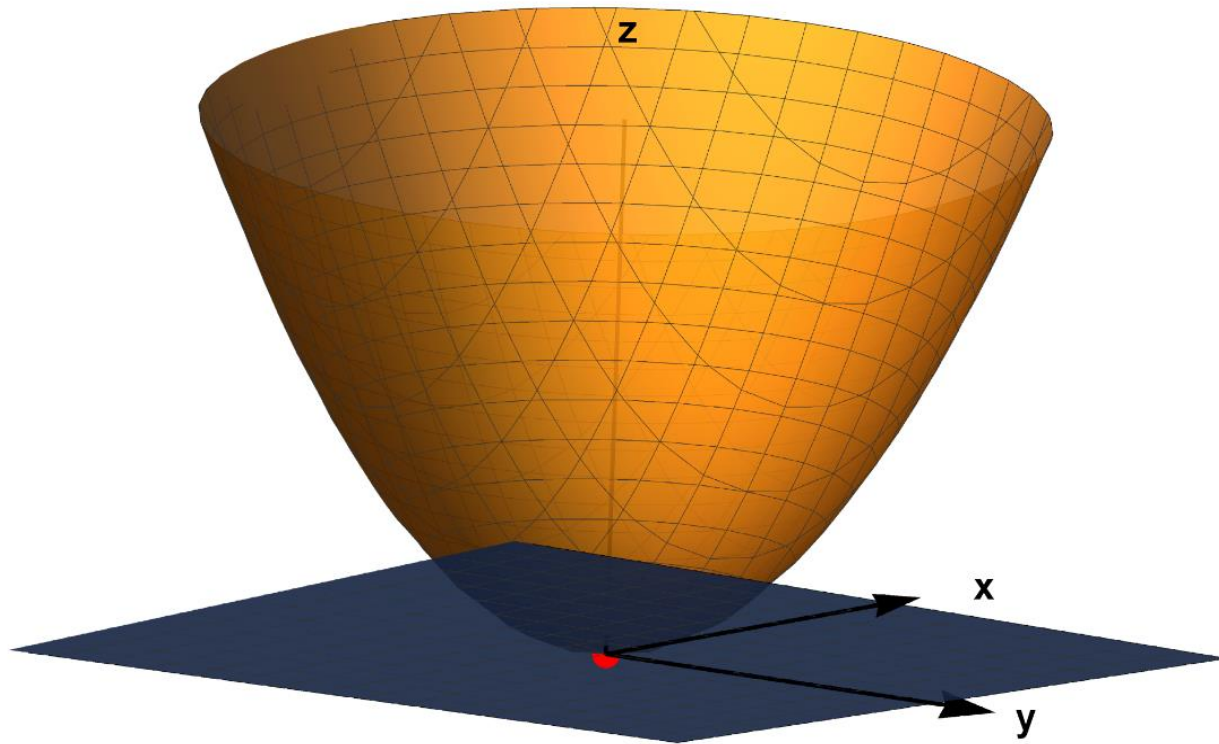
<https://drive.google.com/file/d/1ebrJdVFe3CCuqwgNwb20UqNNNoHDzSBrb/view?usp=sharing>

Fläche mit Maximum und ε -Umgebung $\dot{U}_\varepsilon$



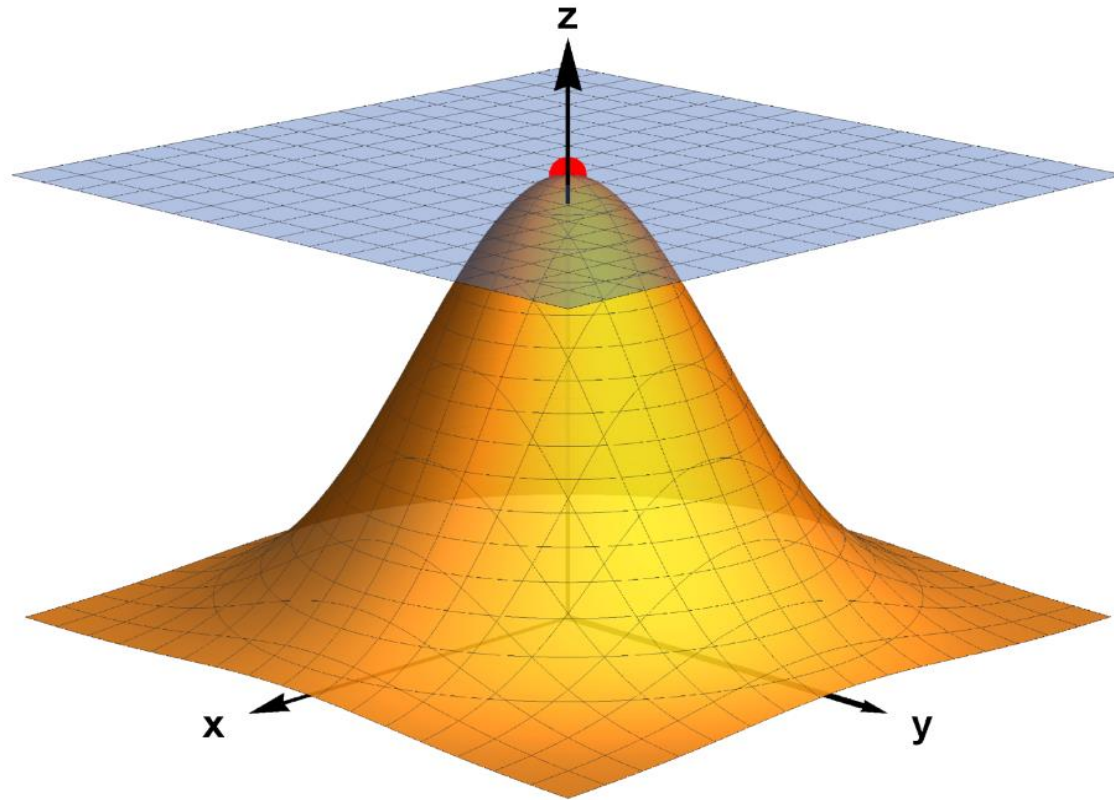
Fläche mit Minimum

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



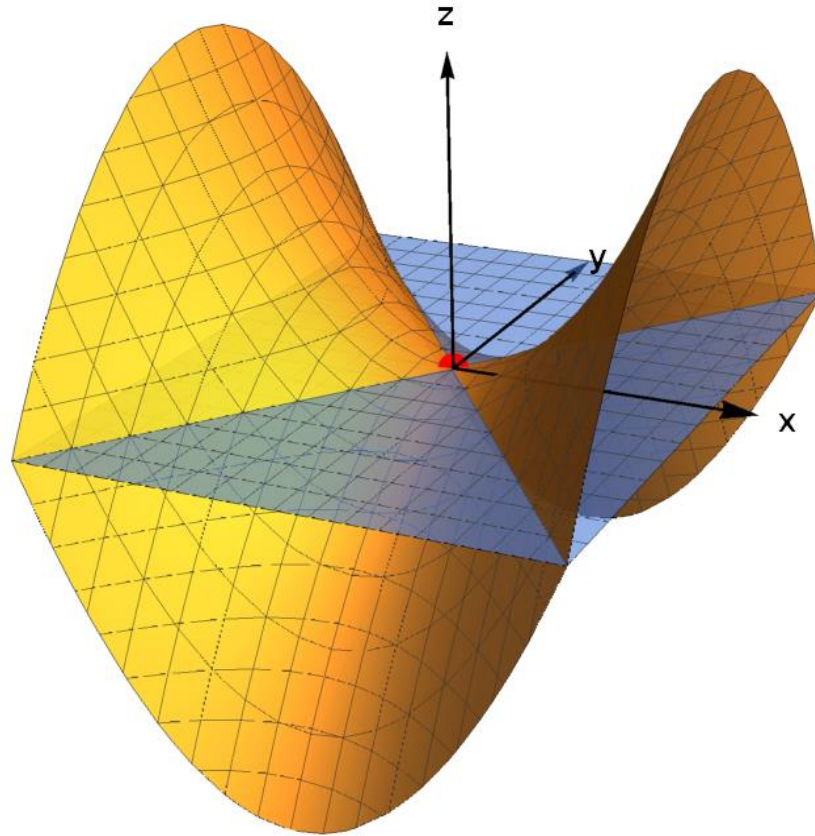
Fläche mit Maximum

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$$



Fläche mit Sattelpunkt

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$



Definitionen

Gegeben sei $f(x, y)$

Die Matrix der zweiten Ableitungen

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{yx}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

heißt **Hessesche Matrix** von f an der Stelle (x, y) .

Die Determinante von $H(x, y)$

$$\Delta(x, y) := \det H(x, y) = [f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)f_{yx}(x, y)]$$

heißt **Diskriminante** von f an der Stelle (x, y) .

Satz (notwendiges Kriterium):

Gegeben sei $f(x, y)$

Wenn gilt

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

(stationäre Punkte, waagerechte TE)

und

$$\Delta(x_0, y_0) := (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)(x_0, y_0) > 0,$$

dann hat f an der Stelle (x_0, y_0) einen **Extremwert**.

Es gilt dann insbesondere (zusätzlich):

Wenn $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{bei}(x_0, y_0) \text{ ist ein } \mathbf{Maximum}.$

Wenn $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{bei}(x_0, y_0) \text{ ist ein } \mathbf{Minimum}.$

Wenn

$\Delta(x_0, y_0) := (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)(x_0, y_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{bei}(x_0, y_0) \text{ ein } \mathbf{Sattelpunkt}.$

Wenn für die Diskriminante gilt

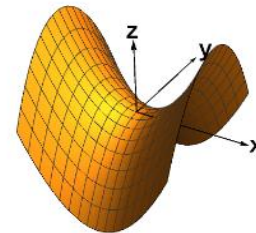
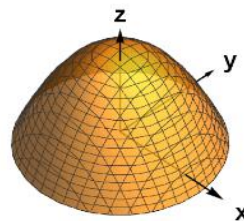
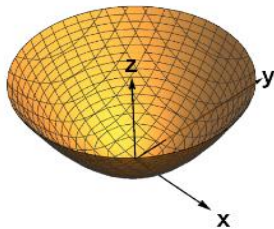
$\Delta(x_0, y_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\text{keine Aussage}}$

Typische Beispiele (WH)

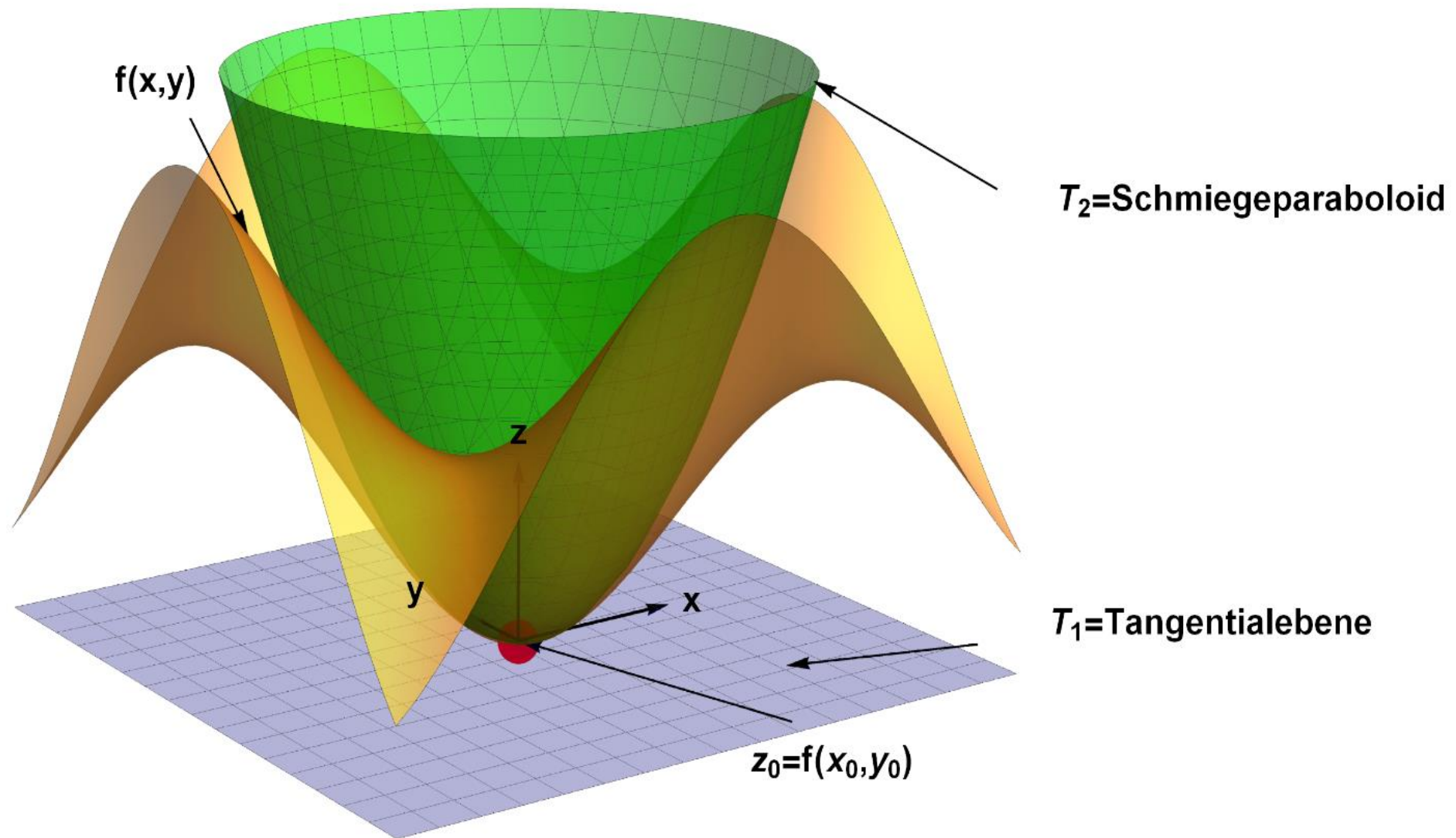
$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{mit Minimum bei } (0,0), \quad \Delta(x, y) = 4$$

$$f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2) \quad \text{mit Maximum bei } (0,0), \quad \Delta(x, y) = 4$$

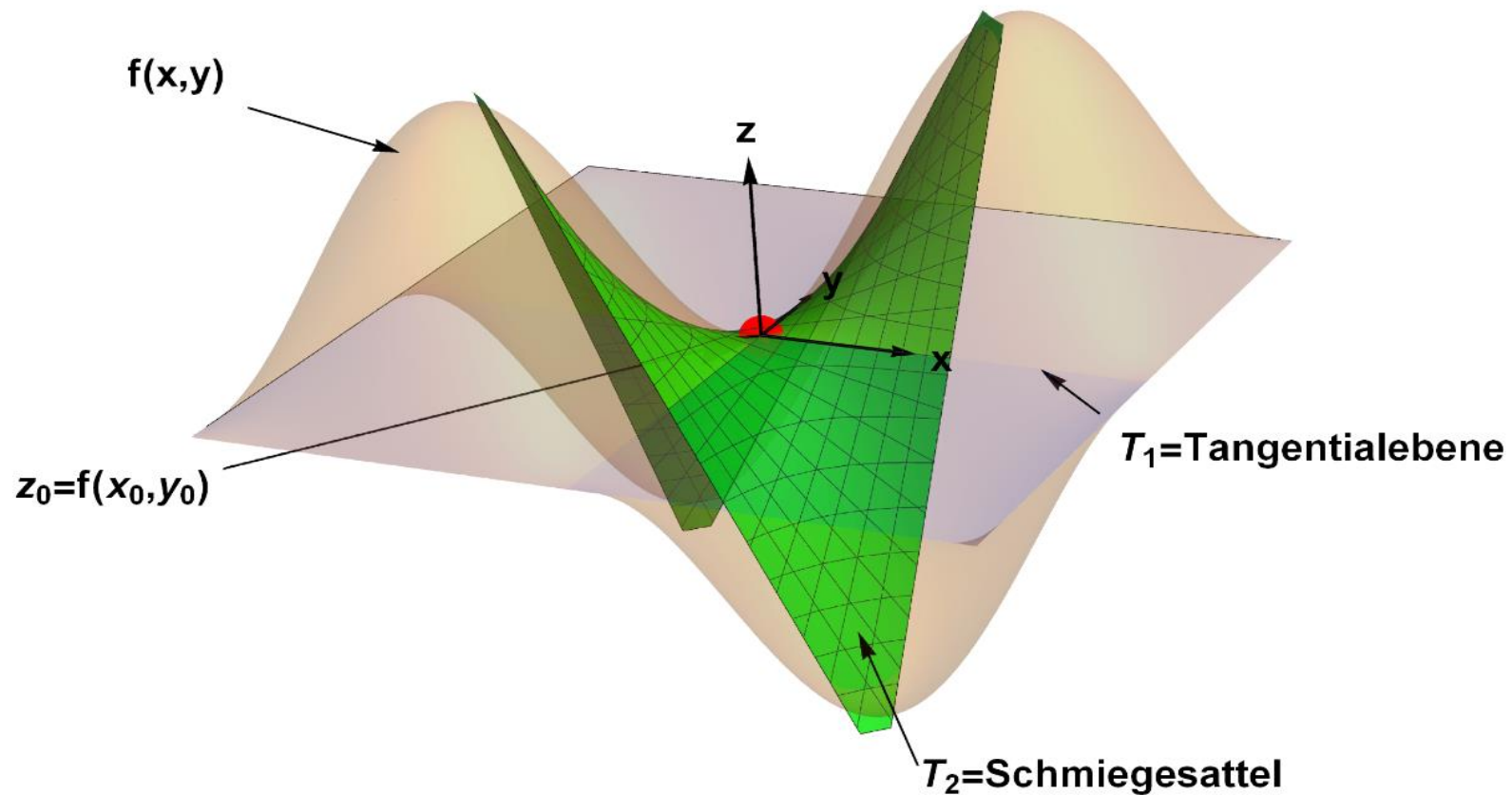
$$f(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{mit Sattelpunkt bei } (0,0), \quad \Delta(x, y) = -4$$



Schmiegeparaboloid ($\Delta > 0$)



Schmiegesattel ($\Delta < 0$)



Beispiel 16.6:

Gegeben sei die Funktion $z = f(x, y) = x^2y + 2x^2 - 3y^3 - y + 1$.

Wir berechnen die Extremwerte und Sattelpunkte:

1. Schritt: Stationäre Punkte berechnen

Aus den Gleichungen

$$f_x(x, y) = 4x + 2xy = 0$$

$$f_y(x, y) = -1 + x^2 - 9y^2 = 0$$

folgen die reellwertigen Lösungen (stationäre Punkte):

$$(x_0, y_0) = (\sqrt{37}, -2) \text{ und } (x_1, y_1) = (-\sqrt{37}, -2)$$

2. Schritt: Diskriminante $\Delta(x, y)$ berechnen

Mit

$$f_{xx}(x, y) = 4 + 2y$$

$$f_{yy}(x, y) = -18y$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 2x$$

folgt:

$$\Delta(x, y) = (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(x, y) = -18y(4 + 2y) - 4x^2$$

3. Schritt: Stationäre Punkte in $\Delta(x, y)$ einsetzen

Dann ist:

$$\Delta(x_0, y_0) = -148$$

Damit ist an der Stelle (x_0, y_0) ein **Sattelpunkt**.

Und da

$$\Delta(x_1, y_1) = -148$$

ist, ist an der Stelle (x_1, y_1) auch ein **Sattelpunkt**. Also hat die Funktion zwei Sattelpunkte.

4. Schritt: Funktionswerte berechnen

$$z_0 = f(x_0, y_0) = 27$$

und

$$z_1 = f(x_1, y_1) = 27$$

Somit sind die beiden Punkte

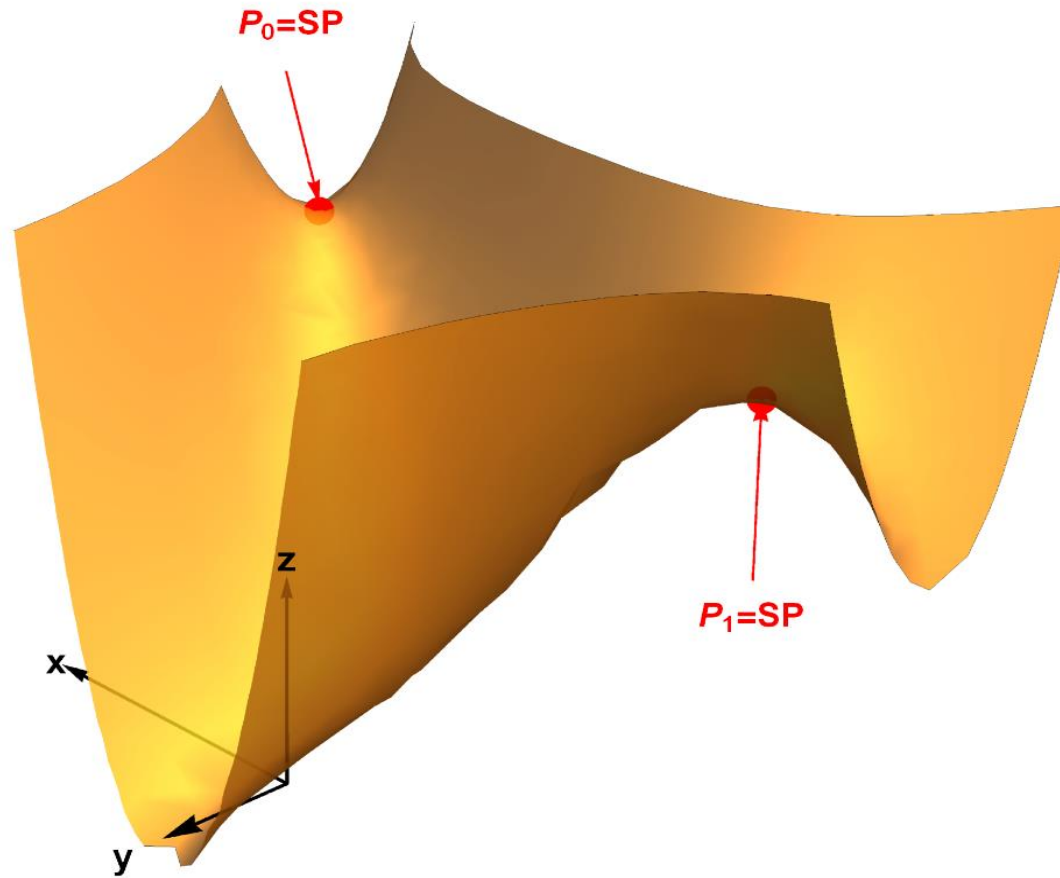
$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{37}, -2, 27) \text{ und}$$

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) = (-\sqrt{37}, -2, 27)$$

die **zwei Sattelpunkte** der Funktion $f(x,y)$ (siehe Abb).

Fläche mit 2 Sattelpunkten

$$z = f(x, y) = x^2y + 2x^2 - 3y^3 - y + 1$$



https://drive.google.com/file/d/1Ur23Pu_jLQF0f7vrll456cE9zThvAAhX/view?usp=sharing

Beispiel 16.7:

Gegeben sei die Funktion $z = f(x, y) = 3x^2y + 2x^3 - 3y^2 + 3y + 2$.

Wir berechnen die Extremwerte und Sattelpunkte:

1. Schritt: Stationäre Punkte berechnen

Aus den Gleichungen

$$f_x(x, y) = 6x^2 + 6xy = 0$$

$$f_y(x, y) = 3 + 3x^2 - 6y = 0$$

folgen die reellwertigen Lösungen (stationäre Punkte):

$$(x_0, y_0) = \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ und } (x_1, y_1) = (-1, 1)$$

2. Schritt: Diskriminante $\Delta(x, y)$ berechnen

Mit

$$f_{xx}(x, y) = 12x + 6y$$

$$f_{yy}(x, y) = -6$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 6x$$

folgt:

$$\Delta(x, y) = (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(x, y) = -6(12x + 6y) - 36x^2$$

3. Schritt: Stationäre Punkte in $\Delta(x, y)$ einsetzen

Dann ist:

$$\Delta(x_1, y_1) = \Delta(-1, 1) = 0$$

Damit ist an der Stelle (x_1, y_1) **keine Entscheidung** möglich !

Es gilt jedoch

$$\Delta(x_0, y_0) = \Delta\left(0, \frac{1}{2}\right) = -18.$$

somit, ist an der Stelle (x_0, y_0) ein Sattelpunkt.

4. Schritt: Funktionswerte berechnen

$$z_1 = f(x_1, y_1) = 3$$

und

$$z_0 = f(x_0, y_0) = 2,75$$

Somit ist der Punkt

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0,5, 2,75)$$

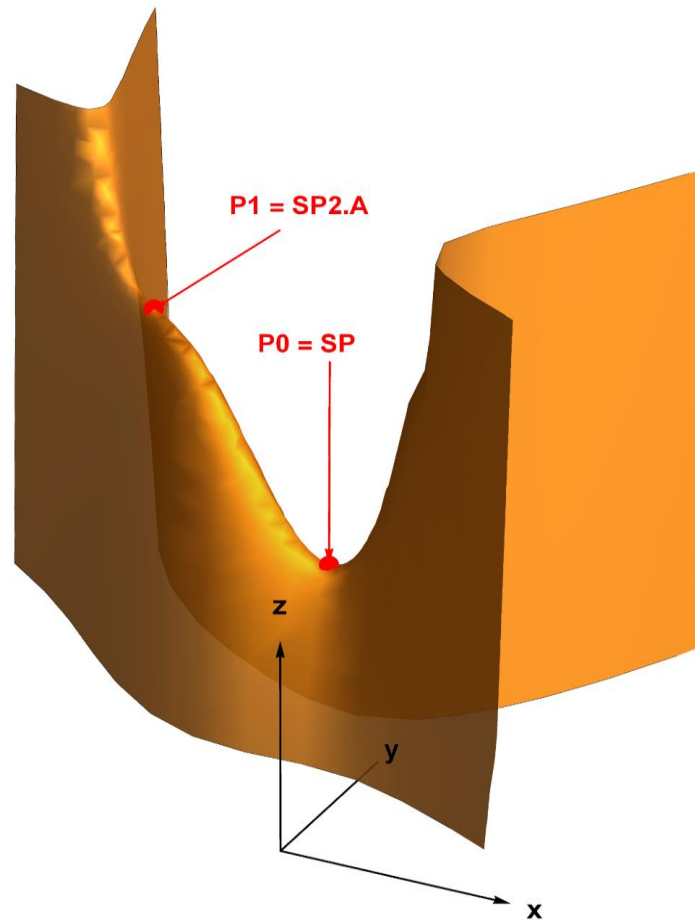
ein Sattelpunkt der Funktion $f(x,y)$ und beim Punkt

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) = (-1, 1, 3)$$

Gibt das Verfahren keine Entscheidung! (s. Abb.: „Gratpunkt“)

Fläche mit Sattelpunkt & Gratpunkt (SP2.Art)

$$z = f(x, y) = 3x^2y + 2x^3 - 3y^2 + 3y + 2$$



<https://drive.google.com/file/d/1de-rbWtmsgQ7LhWmBc0fsAHi3fftNDSw/view?usp=sharing>

Beispiel 16.8:

Gegeben sei die Funktion $z = f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + y^3/3$.

Wir berechnen die Extremwerte und Sattelpunkte:

1. Schritt: Stationäre Punkte berechnen

Aus den Gleichungen

$$f_x(x, y) = 2(-2 + x) = 0$$

$$f_y(x, y) = 2(-1 + y) + y^2 = 0$$

folgen die reellwertigen Lösungen (stationäre Punkte):

$$(x_0, y_0) = (2, -1 - \sqrt{3}) \text{ und } (x_1, y_1) = (2, -1 + \sqrt{3})$$

2. Schritt: Diskriminante $\Delta(x, y)$ berechnen
Mit

$$f_{xx}(x, y) = 2$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 + 2y$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0$$

folgt:

$$\Delta(x, y) = (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(x, y) = 2(2 + 2y)$$

3. Schritt: Stationäre Punkte in $\Delta(x, y)$ einsetzen

Dann ist:

$$\Delta(x_0, y_0) = -6,92 < 0$$

Damit ist an der Stelle (x_0, y_0) ein **Sattelpunkt**.

Und da

$$\Delta(x_1, y_1) = 6,92 > 0$$

ist, ist an der Stelle (x_1, y_1) ein Minimum. Also hat die Funktion einen Sattelpunkt und ein Minimum.

4. Schritt: Funktionswerte berechnen

$$z_0 = f(x_0, y_0) = 7,13$$

und

$$z_1 = f(x_1, y_1) = 0,20$$

Somit sind die beiden Punkte

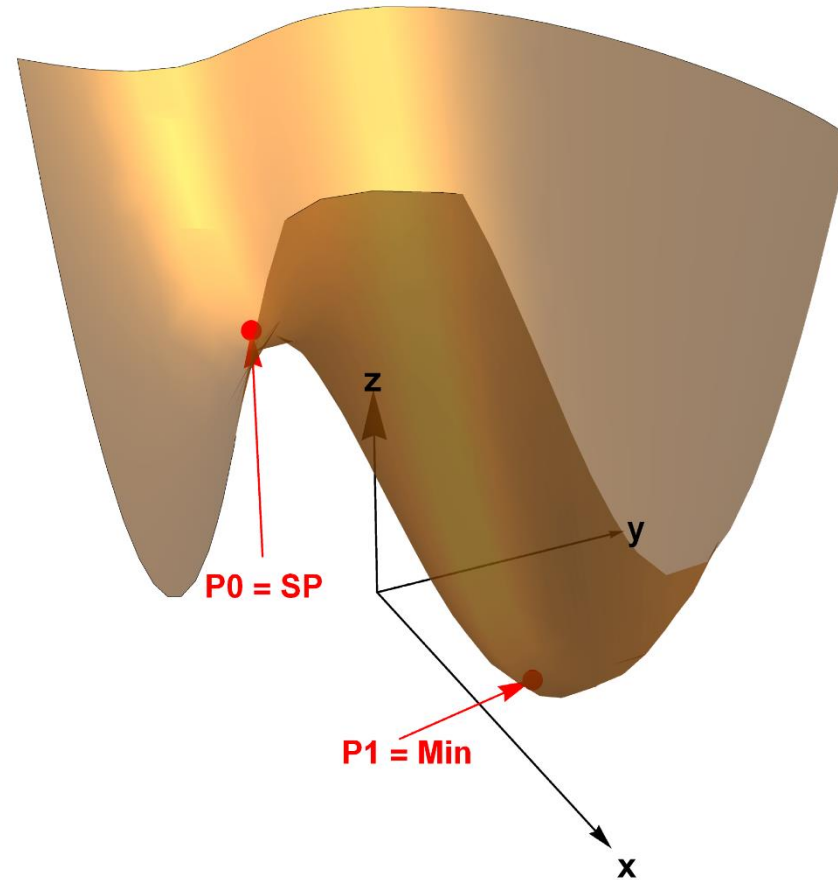
$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (2, -1 - \sqrt{3}, 7,13) \text{ und}$$

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) = (2, -1 + \sqrt{3}, 0,2)$$

Sattelpunkt und Minimum der Funktion $f(x,y)$ (siehe Abb).

Fläche mit Sattelpunkt & Minimum

$$z = f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + y^3 / 3$$



https://drive.google.com/file/d/1yOc7U7DXJTmE67lluF_tTIPLNtDfvSMn/view?usp=sharing