Matrizen und Determinanten

Matrizen sind Zahlenschemata, die als Koeffizienten bei linearen Gleichungssystemen das System bestimmen. Gleichartige Matrizen bilden Vektorräume. Matrizen können auch miteinander multipliziert werden.
Determinanten sind „Kennzahlen“ quadratischer Matrizen. Sie dienen als Kriterien dafür, ob eine Matrix invertierbar ist oder nicht und sind damit von großer Wichtigkeit beim Lösungsverhalten von linearen Gleichungssystemen.

Matrizen sind Zahlenschemata

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & a_{ik}. & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ik}) \quad bzw. \;\; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & . & . & . & b_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & b_{ik}. & . & . \\ . & . & . & . & . \\ b_{n1} & . & . & . & b_{nn} \end{pmatrix} = (b_{ik})$$

Summe und Produkt mit Skalaren werden koeffizientenweise definiert:

Für (n,n)-Matrizen **A** und **B** benutzen wir die Kurzform

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ik}) + (b_{ik})$$

$$\lambda\, \mathbf{A} = \lambda\, (a_{ik}) \qquad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}$$

Die Linearkombination von zwei (*n*,*n*)-Matrizen A und B ist wieder eine (*n*,*n*)-Matrix:

$$\lambda_1\mathbf{A} + \lambda_2\mathbf{B} = \lambda_1\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & a_{ik}. & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} b_{11} & . & . & . & b_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & b_{ik}. & . & . \\ . & . & . & . & . \\ b_{n1} & . & . & . & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11} & . & . & . & \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 b_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & \lambda_1 a_{ik} + \lambda_2 b_{ik}. & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 b_{n1} & . & . & . & \lambda_1 a_{nn} + \lambda_2 b_{nn} \end{pmatrix}$$

(Kurzform) $= \lambda_1(a_{ik}) + \lambda_2(b_{ik}) = (\lambda_1 a_{ik} + \lambda_2 b_{ik})$ für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Matrizenmultiplikation

Matrizen können miteinander multipliziert werden. Der einfachste Fall ist

Definition 11.1

Seien **A** und **B** zwei (2,2)-Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Dann definiert man das Produkt:

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ & & \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \end{array}$$

wobei gilt

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \qquad c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \qquad c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}\,,$$

Achtung: Das Matrizenprodukt ist nicht kommutativ.
Es gilt im allgemeinen

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{nn}} \cdot \mathbf{B}_{\boldsymbol{nn}} \neq \mathbf{B}_{\boldsymbol{nn}} \cdot \mathbf{A}_{\boldsymbol{nn}}$$

Beispiel: betrachte

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Es gibt aber zu jeder (n,n) Matrix eine „kommutative“ Gruppe.

Definition 11.2: nichtquadratische Matrizen

Sei $\mathbf{A}_{nl}$ eine Matrix mit *n* Zeilen und *l* Spalten sowie $\mathbf{B}_{lm}$ eine Matrix mit *l* Zeilen und *m* Spalten. Dann ist das Produkt eine Matrix $\mathbf{C}_{nm}$ mit *n* Zeilen und *m* Spalten, definiert durch:

$$\mathbf{C}_{nm} = \mathbf{A}_{nl} \cdot \mathbf{B}_{lm}$$

Dabei gilt:

$$\begin{array}{c} k\ te\ Spalte \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} b_{11} & . & . & b_{1k} & . & b_{1m} \\ . & . & . & b_{2k} & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{l1} & . & . & b_{lk} & . & b_{lm} \end{pmatrix} \\ \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & . & a_{1l} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{il} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nl} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$i\ teZeile \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & . & a_{1l} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{il} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nl} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & . & . & . & . & c_{1m} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & c_{ik} & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ c_{n1} & . & . & . & . & c_{nm} \end{pmatrix}$$

Also gilt für die Matrix $\mathbf{C}_{nm}$

$$c_{ik} = (i\text{−te Zeile}) \cdot (k\text{−te Spalte}) \quad = \quad \sum_{j=1}^{l} a_{ij} b_{jk} \quad \text{für } i = 1, .. n \text{ und } k = 1, \dots m.$$

Beispiel 11.1:

$$C_{n1} = A_{nn} \cdot B_{n1}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{23} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & a_{ik} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_k \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ c_i \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix}$$

Bemerkung 11.2:

Wie in Beispiel 11.1 kann man ein lineares Gleichungssystem (s. Kap.12)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{23} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & a_{ik} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_k \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ c_i \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix}$$

mit Matrizenmultiplikation in der Form schreiben:

$$\mathbf{A}\,\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{c}}$$

11.3 Determinanten

Determinanten sind wichtige „Kennzahlen“ quadratischer Matrizen.

Definition 11.3:

(1) Determinante einer (2,2)-Matrix:

Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Determinante von **A** definiert durch:

$$(11.2) \qquad \det(\mathbf{A}) \coloneqq \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \coloneqq \begin{array}{c} \begin{array}{cc} + & \quad - \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{array} = +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(2) Determinante einer (3,3)-Matrix:

Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Determinante von **A** definiert durch:

$$\det(\mathbf{A}) \coloneqq \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} {\color{red}+} & {\color{green}-} & {\color{blue}+} \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array} =$$

$${\color{red}+a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} {\color{green}- a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}} {\color{blue}+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}$$

Die (2,2)-Unterdeterminanten werden dann wie in (1) berechnet.

(3) Determinante einer (4,4)-Matrix:

Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Determinante von **A** definiert durch:

$$\det(\mathbf{A}) \coloneqq \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \color{red}{+} & \color{green}{-} & \color{blue}{+} & \color{purple}{-} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \end{array} =$$

$$+a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Die (3,3) Unterdeterminanten werden dann wie in **(2)** berechnet.

(4) Determinante einer (n,n)-Matrix (allgemeiner Fall)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Die Vorzeichen der jeweiligen Unterdeterminanten werden dabei nach dem Schachbrettmuster bestimmt:

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{matrix}$$

Sei D_{ik} die Determinante der Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und der k-ten Spalte von **A** entsteht:

$$\mathrm{D}_{ik} := \det \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & .\cancel{a_{1k}} & . & a_{1n} \\ . & . & . & .\cancel{a_{2k}} & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \cancel{a_{i1}} & \cancel{a_{i2}} & . & \cancel{a_{ik}} & . & \cancel{a_{in}} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & .\cancel{a_{nk}} & . & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow \mathit{streichen!}$$

$$\uparrow$$

$$\mathit{streichen!}$$

Dann kann man die Determinante von **A** berechnen durch:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{(1+k)}\, a_{1k} D_{1k}$$

(Entwicklung nach der ersten Zeile)

Man kann aber auch nach einer beliebigen Zeile oder Spalte entwickeln und erhält dieselbe Determinante.

Dies besagt der

Satz 11.4: Laplacescher Entwicklungssatz

Es gilt

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{(i+k)}\, a_{ik} D_{ik}$$

(Entwicklung nach der *i*-ten Zeile für beliebiges $i = 1, 2, 3\ldots, n$)

oder

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i+k)}\, a_{ik} D_{ik}$$

(Entwicklung nach der *k*-ten Spalte für beliebiges $k = 1, 2, 3\ldots, n$)

11.4 Einheitsmatrix und inverse Matrix

Betrachte die (n,n)-Matrix **E** (die in der Diagonalen Einsen hat und sonst *Nullen*):

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & . & . & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese heißt ***Einheitsmatrix***

Eine Kurzschreibweise für **E** ist **E** = $\left(\delta_{ij}\right)$.

Es gilt dann für eine beliebige (n,n)-Matrix **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(1) $\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{A}$ (**E** ist vertauschbar mit allen **A**)

(2) Wenn eine (n,n)-Matrix **B** existiert mit der Eigenschaft

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}\,,$$

dann heißt **B** die ***inverse Matrix*** von **A** mit der Schreibweise

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Definition 11.4:

Eine Matrix $\mathbf{A}$ heißt ***regulär,*** wenn gilt $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Sie heißt ***singulär***, wenn gilt $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Bemerkung 11.4:

(1) Ein lineares Gleichungssystem (LGS) der Form (s. Bemerkung 11.2)

$$\mathbf{A}\,\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{c}}$$

hat genau dann **nur eine** Lösung, wenn gilt $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

(2) Wenn $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, genau dann existiert $\mathbf{A}^{-1}$ und es gilt

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^{-1}\vec{\boldsymbol{c}}.$$

Dies ist aber kein effektives Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme, da die Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ aufwendiger ist als die klassischen Lösungsverfahren (s. Kap.12).

(2) Wenn $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, genau dann existiert $\mathbf{A}^{-1}$ und es gilt

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^{-1}\vec{\boldsymbol{c}}.$$

Dies ist aber kein effektives Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme, da die Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ aufwendiger ist als die klassischen Lösungsverfahren (s. Kap.12).

(3) Wenn das LGS homogen ist, d.h. $\boldsymbol{A}\,\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ und $\det(\boldsymbol{A}) = 0$, dann gibt es außer der trivialen Lösung $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ noch unendlich viele weitere Lösungen.

(2) Wenn $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, genau dann existiert $\mathbf{A^{-1}}$ und es gilt

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A^{-1}}\vec{\boldsymbol{c}}.$$

Dies ist aber kein effektives Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme, da die Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A^{-1}}$ aufwendiger ist als die klassischen Lösungsverfahren (s. Kap.12).

(3) Wenn das LGS homogen ist, d.h. $\mathbf{A}\,\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ und $\det(\mathbf{A}) = 0$, dann gibt es außer der trivialen Lösung $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ noch unendlich viele weitere Lösungen.

(4) Wenn das LGS homogen ist, d.h. $\mathbf{A}\,\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$, jedoch $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, dann gibt es genau eine Lösung und dies ist die triviale Lösung $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$