Unbestimmte Ausdrücke

die Formel von Bernoulli-L'Hospital

Betrachte die Funktion

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Sie ist wohldefiniert für $x \neq 0$. Aber an der Stelle $x = 0$ entsteht der Ausdruck

$$f(x) = "\frac{0}{0}"$$

Dies ist ein unbestimmter Ausdruck.

Um solche Ausdrücke allgemein bestimmen zu können betrachten wir die Funktionen

$$f(x) \text{ und } g(x).$$

Sie seien stetig und differenzierbar an der Stelle x_0 und es gilt

$$f(x_0) = g(x_0) = 0.$$

Dann ist $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ ein ***unbestimmter Ausdruck***.

Um den Wert dieses Ausdrucks zu bestimmen, entwickeln wir an der Stelle x_0 die Taylor-Polynome T_1 für Zähler und Nenner:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T_1} + \underbrace{\frac{f''(t_1)}{2}(x - x_0)^2}_{R_1}$$

$$g(x) = \underbrace{g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)}_{T_1} + \underbrace{\frac{g''(t_2)}{2}(x - x_0)^2}_{R_1}$$

mit den Restgliedern

$$\frac{f''(t_1)}{2}(x - x_0)^2 \text{ für } t_1 \in [x_0, x]$$

und

$$\frac{g''(t_2)}{2}(x - x_0)^2 \text{ für } t_2 \in [x_0, x]$$

Damit haben wir (für Zähler und Nenner getrennt entwickelt):

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(t_1)}{2}(x - x_0)^2}{g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{g''(t_2)}{2}(x - x_0)^2}$$

Und es gilt:

$$(7.13) \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(t_1)}{2}(x-x_0)^2}{g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+\frac{g''(t_2)}{2}(x-x_0)^2}$$

Wegen $f(x_0) = g(x_0) = 0$ folgt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(t_1)}{2}(x - x_0)^2}{g'(x_0)(x - x_0) + \frac{g''(t_2)}{2}(x - x_0)^2}$$

Kürzen durch $(x - x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0) + \frac{f''(t_1)}{2}(x - x_0)}{g'(x_0) + \frac{g''(t_2)}{2}(x - x_0)}$$

ergibt

die ***Formel von Bernoulli-L'Hospital***:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \tag{7.14}$$

Wenn zusätzlich $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$ gilt, führt die Formel (7.14) nicht zum Ziel. Wenn man jedoch f und g in (7.13) bis zum Taylor-Polynom T_2 mit dem Restglied R_2 entwickelt, ergibt sich:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(x_0)}{g''(x_0)}$$

Für den Fall

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

kann der Grenzwert

$$\lim_{\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ebenfalls mit der Formel (7.14) berechnet werden, indem man

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \right)$$

betrachtet.

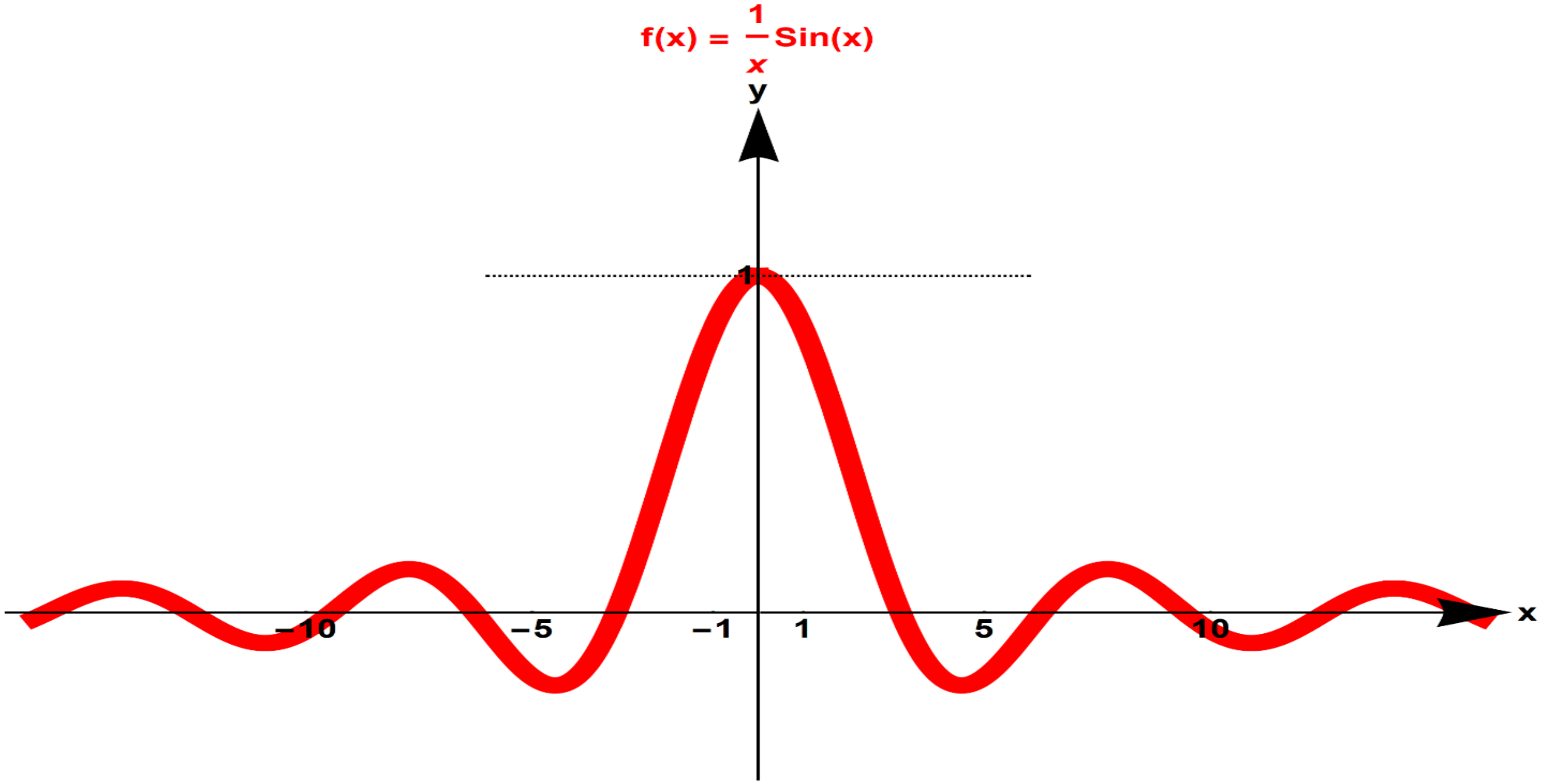
Grenzwerte vom Typ „∞^0", „1^∞", „0^0" kann man mit der Umformung

$$f(x)^{g(x)} = \left(\mathrm{e}^{g(x)\ln(f(x))}\right)$$

ermitteln.

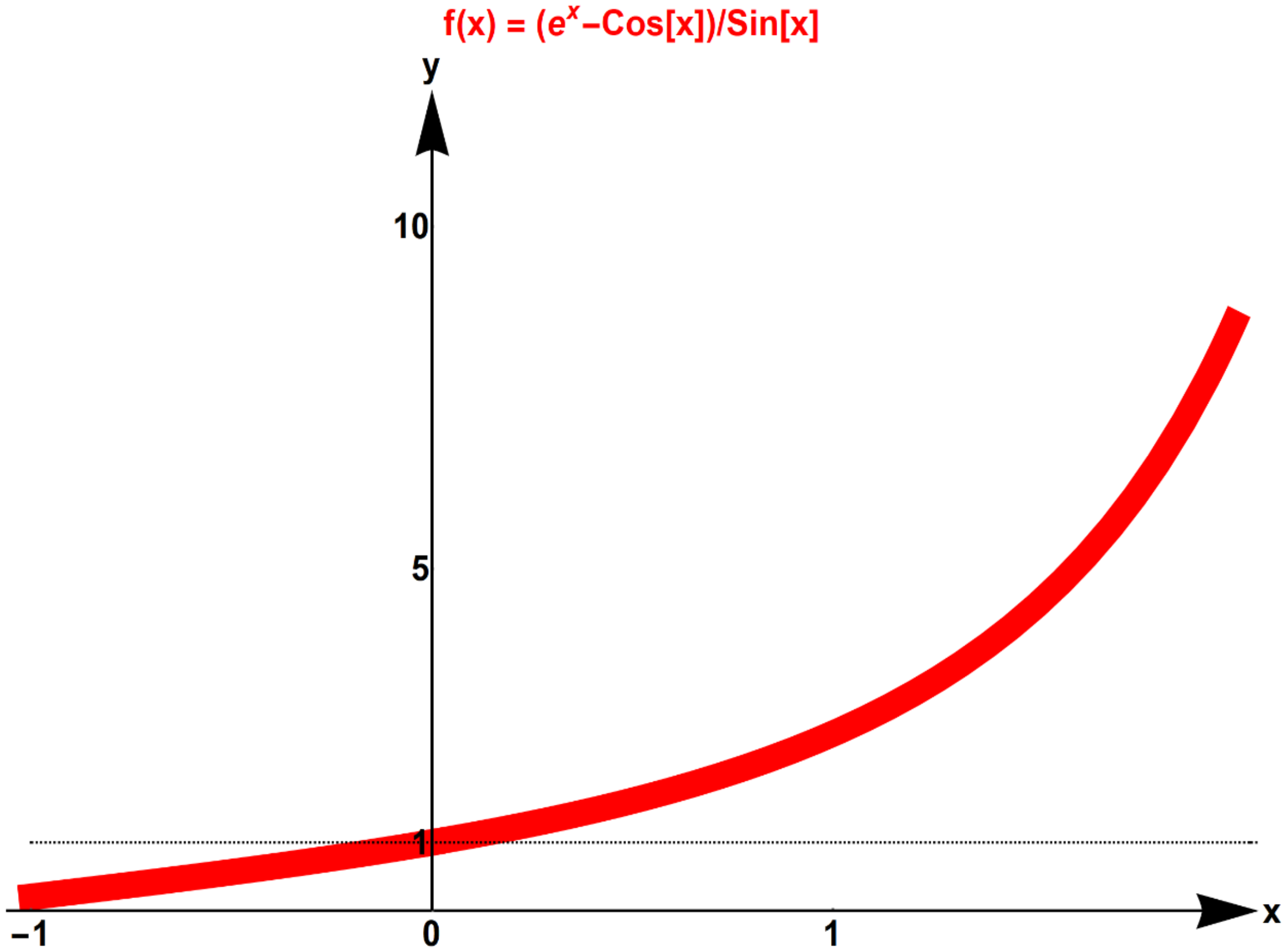
Beispiel 7.13:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\cos(0)}{1}=1$$



Beispiel 7.14:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{\sin x} = \frac{e^0 + \sin(0)}{\cos(0)} = 1$$



Beispiel 7.15: Für $x > 0$ gilt:

$$\lim_{x\to 0+}(x^x) = \lim_{x\to 0+}\left(\mathrm{e}^{x\ln(x)}\right) = \mathrm{e}^{\left(\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)\right)}$$

mit

$$\left(\lim_{x\to 0+} x\ln(x)\right) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x)}{1/x} \overbrace{=}^{B.L.} \lim_{x\to 0+} -\frac{1/x}{1/x^2} = -\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{x} = 0$$

Somit gilt:

$$\lim_{x\to 0+}(x^x) = \mathrm{e}^0 = 1$$

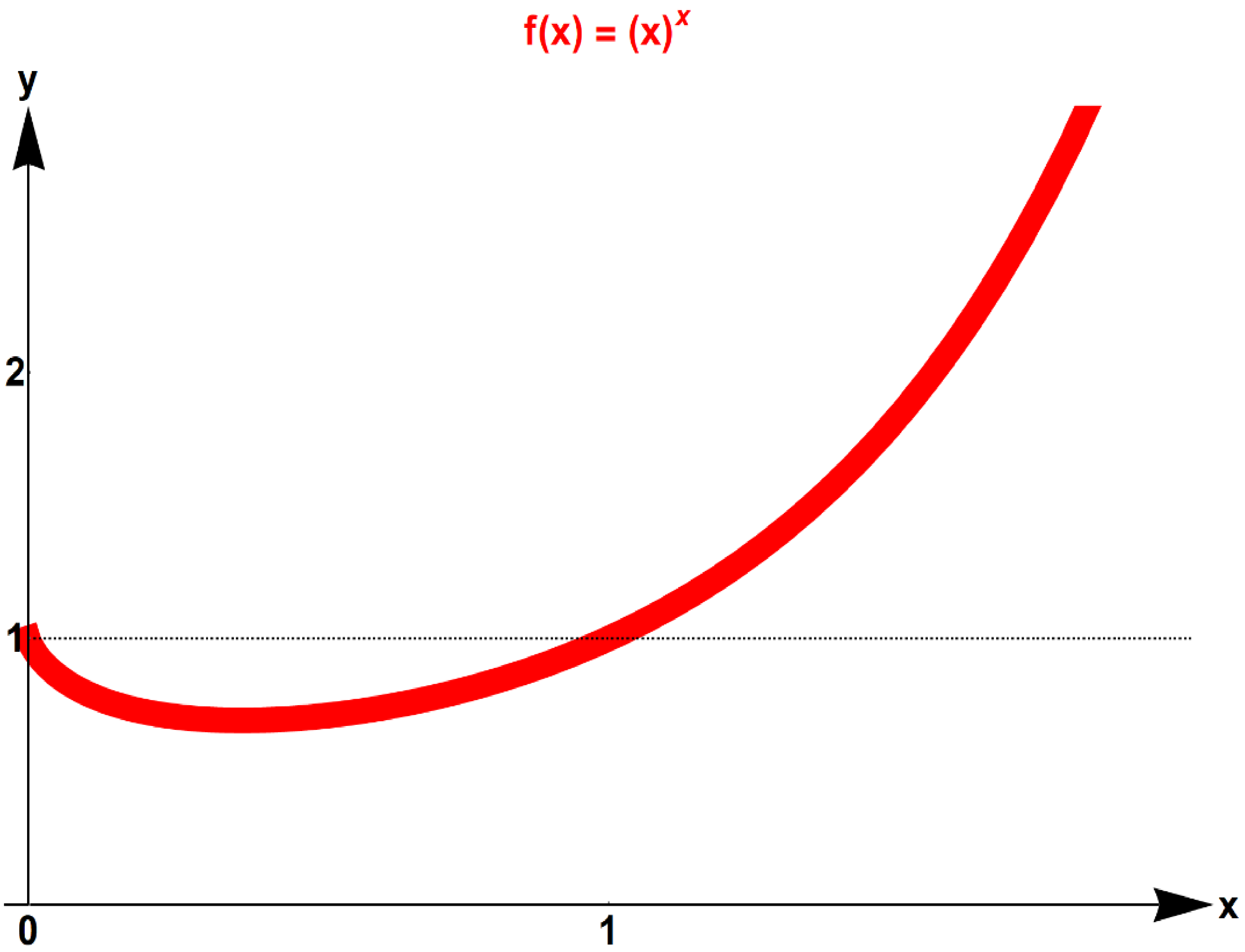


Abb. 7.17. Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$ für $x > 0$

Beispiel 7.16: Es gilt(vgl. e-Folge Kap.4):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}$$

mit

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{{}^{1}/_{x}}\right) \overset{B.L.}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$
$$= 1$$

Somit gilt:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$$

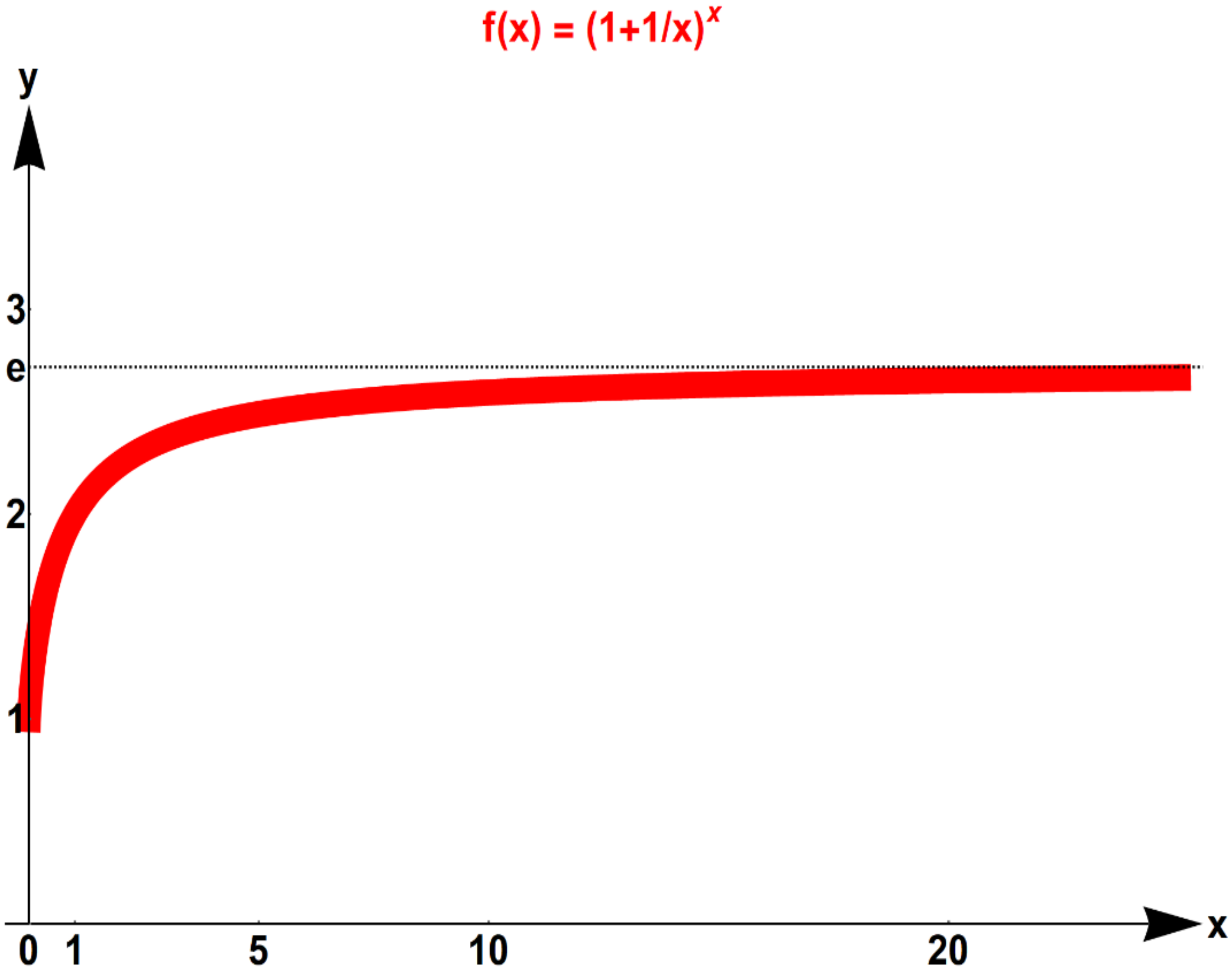


Abb. 7.18. Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + {}^{1}/_{x})^{x} = \mathrm{e}$