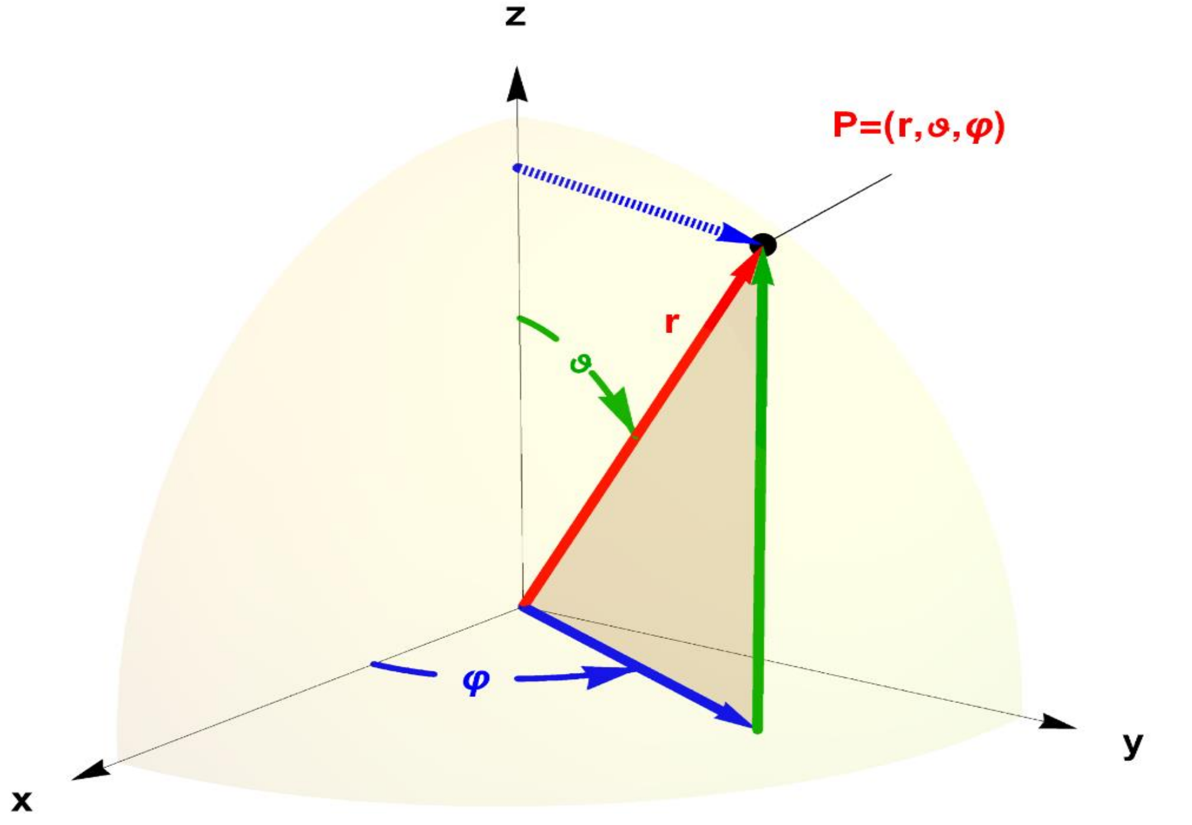
Integralrechnung im Mehrdimensionalen

4. Teil

Dreifachintegrale mit Kugelkoordinaten

Dreifachintegralen mit Kugelkoordinaten

Ein Punkt P im Raum $\mathbb{R}^3$ wird dann beschrieben durch die die Winkel ϑ, φ und den Radius r, d.h. $P = (r, \vartheta, \varphi)$



Die Umrechnung von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten erfolgt mit den Formeln :

$$x = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)$$
$$z = r\cos(\vartheta)$$

Die Funktionaldeterminante D ist dann :

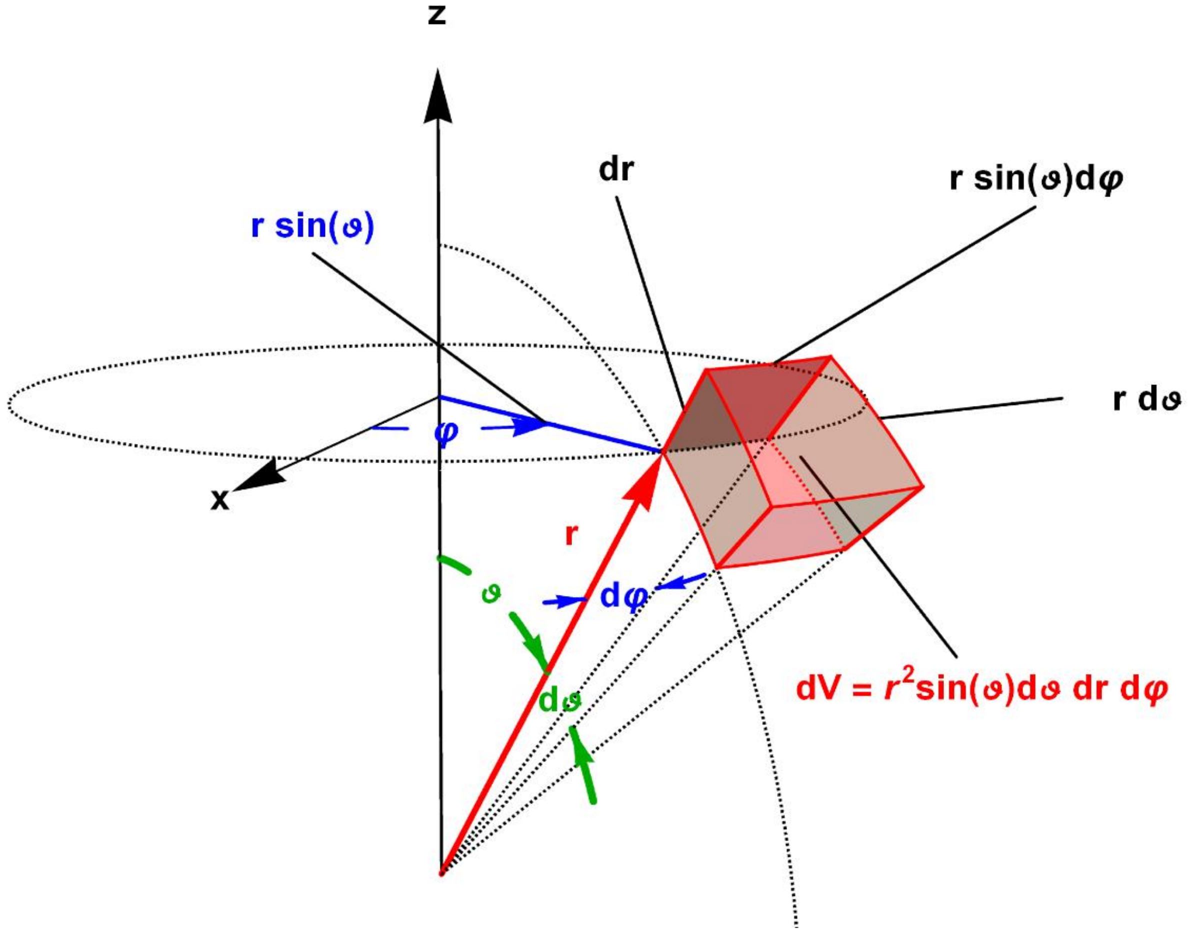
$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = r^2\sin(\vartheta)$$

Das „Volumenelement“ in Kugelkoordinaten ist somit:

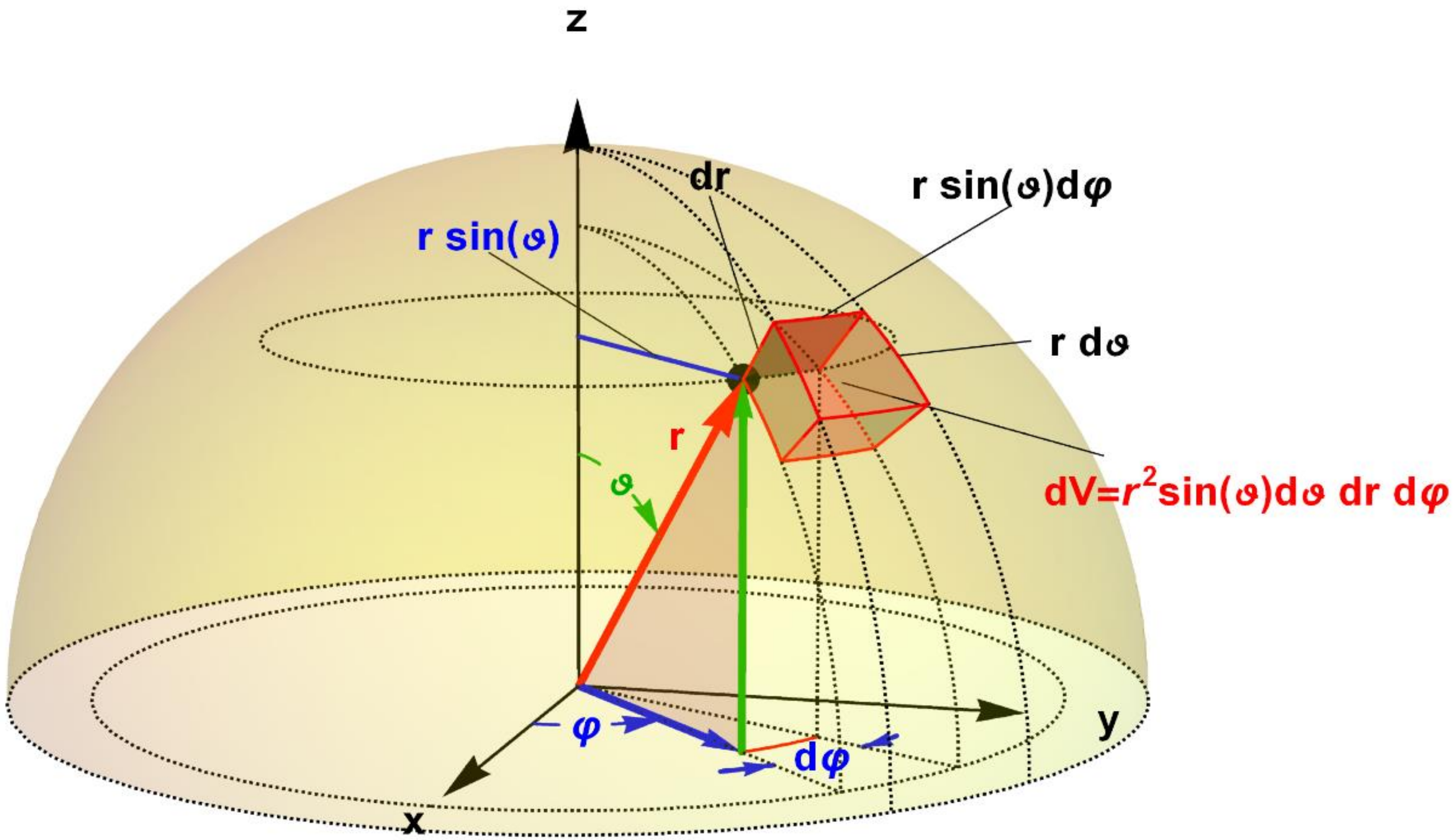
$$dV = r^2\sin(\,\vartheta)drd\varphi d\vartheta$$

Das „Volumenelement " in Kugelkoordinaten

$$dV = r^2 \sin(\vartheta) dr d\varphi d\vartheta$$



Das Volumenelement “ in Kugelkoordinaten in der Halbkugel



http://sn.pub/lHyjuJ

Beispiel 17.15:

Berechne das Volumen einer Kugel mit dem Radius R. Die Grenzen in Kugelkoordinaten sind

$$(V) = \begin{pmatrix} 0 \leq \vartheta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{pmatrix}$$

Dann ist das Volumen:

D

$$V = \iiint_V 1 \; dv = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=R} \left(\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta \right) dr \right) d\varphi$$

$$= 2\pi \int_{r=0}^{r=R} \left(\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} r^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta \right) dr = \; 2\pi \frac{R^3}{3} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \sin(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= 2\pi \frac{R^3}{3} [-\cos(\vartheta)]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Beispiel 17.16:

Volumen eines „Kugelstücks“

Die Grenzen sind gegeben durch:

$$(V) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{8} \leq \vartheta \leq \frac{3\pi}{8} \\ 0{,}6 \leq r \leq 1 \\ \frac{\pi}{5} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{5} \end{pmatrix}$$

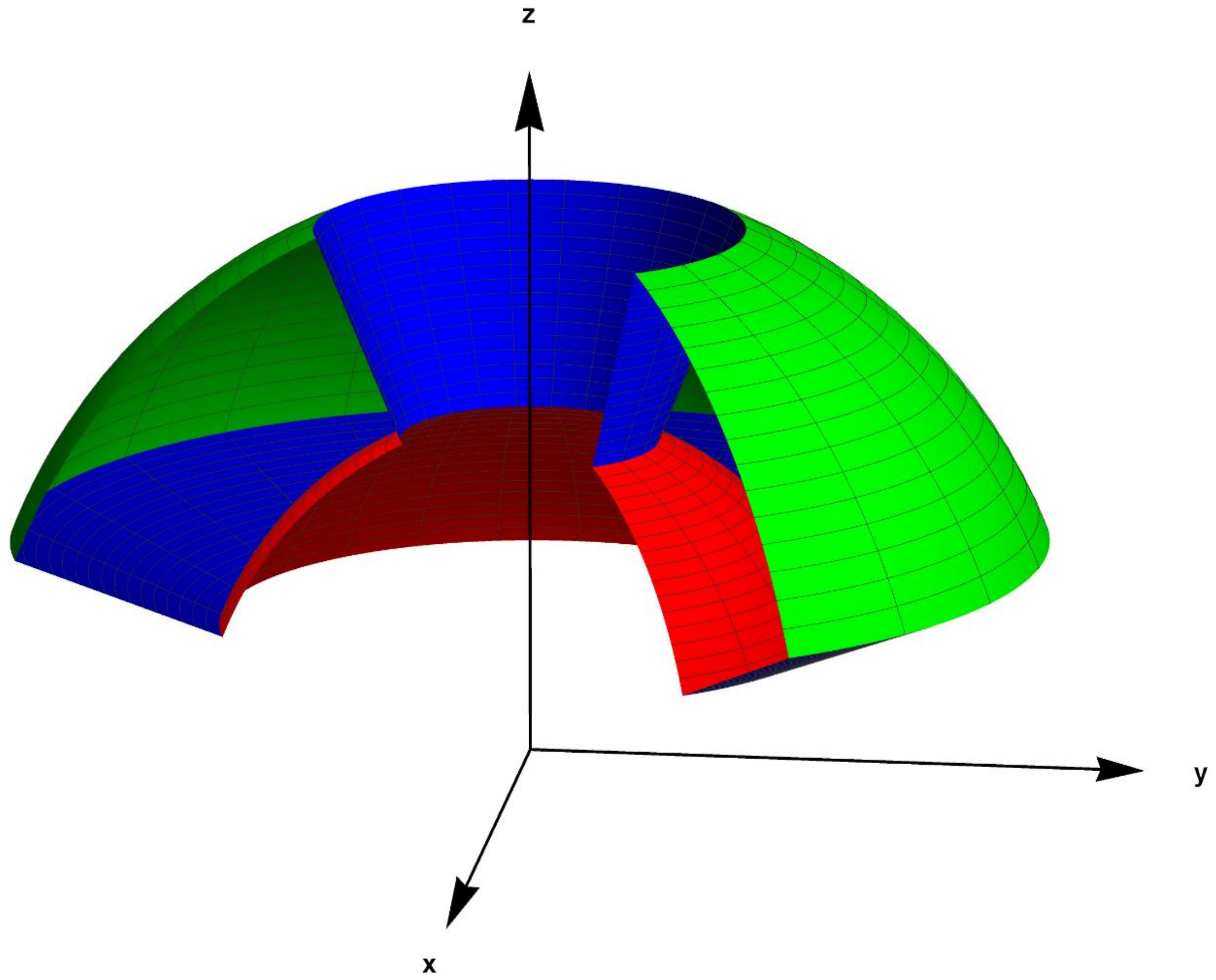
Dann ist das Volumen:

$$V = \iiint\limits_V 1 \; dv = \int\limits_{\varphi=\frac{\pi}{5}}^{\varphi=\frac{7\pi}{5}} \left(\int\limits_{r=0,6}^{r=1} \left(\int\limits_{\vartheta=\frac{\pi}{8}}^{\vartheta=\frac{3\pi}{8}} r^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta \right) dr \right) d\varphi$$

$$= \frac{6\pi}{5} \int\limits_{r=0,6}^{r=1} \left(\int\limits_{\vartheta=\frac{\pi}{8}}^{\vartheta=\frac{3\pi}{8}} r^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta \right) dr = \frac{6\pi}{5} \left(\frac{1-0,6^3}{3} \right) [-\cos(\vartheta)]_{\vartheta=\frac{\pi}{8}}^{\vartheta=\frac{3\pi}{8}} = \cdots$$

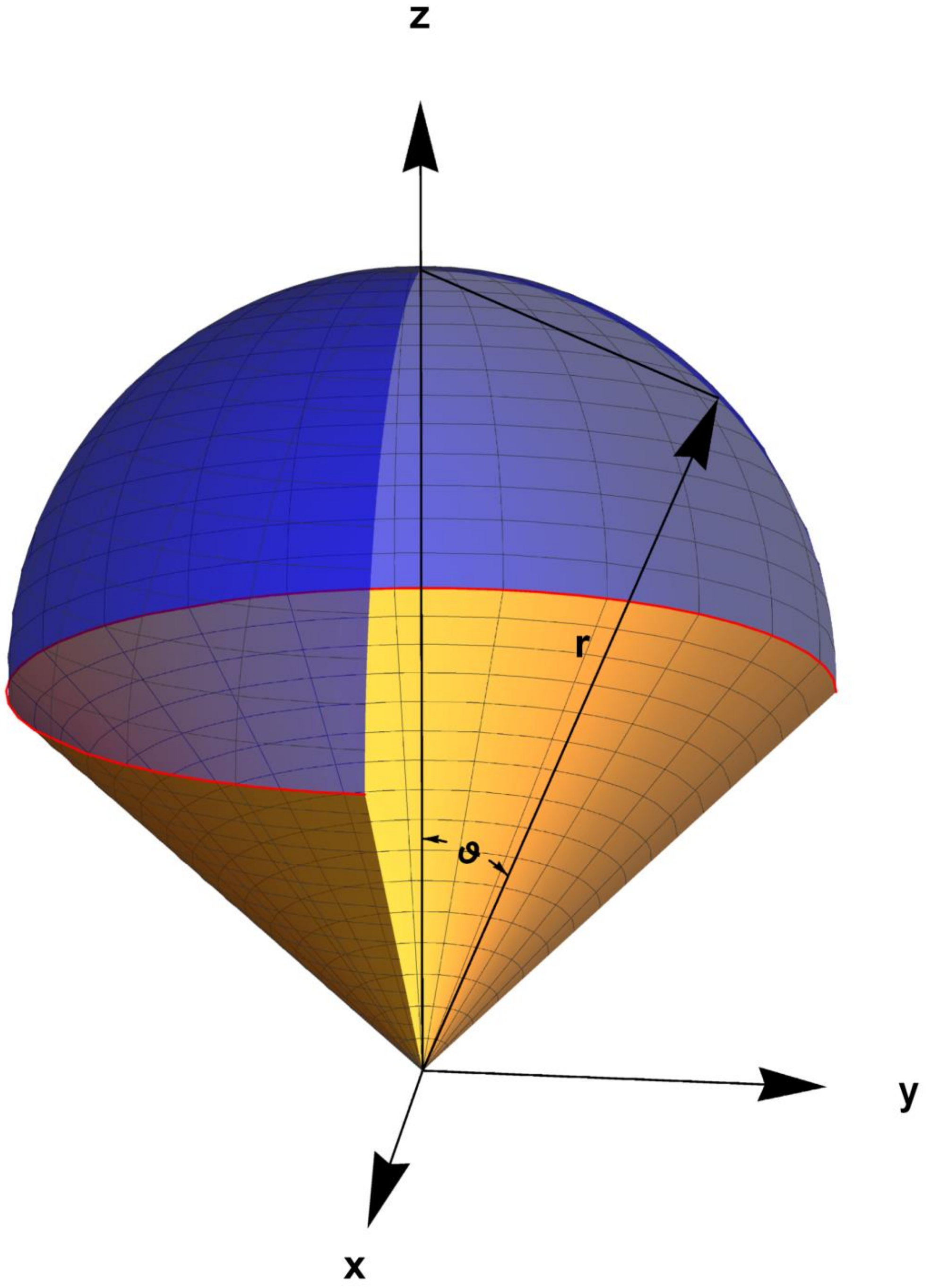
$$= 0,5327$$

Kugelabschnitt in Kugelkoordinaten



Beispiel 17.17 „Eistüte“
Gegeben seien die Grenzen eines Körpers (s. Abb. 17.32):

$$(V) = \begin{pmatrix} 0 \leq r \leq \cos(\vartheta) \\ 0 \leq \vartheta \leq \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{pmatrix}$$


z
r
ϑ
y
x

Dann ist das Volumen:

$$V = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{4}} \left(\int_{r=0}^{r=cos(\vartheta)} r^2 \sin(\vartheta)\, dr \right) d\vartheta \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\vartheta)^3}{3} \sin(\vartheta)\, d\vartheta \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left[-\frac{\cos(\vartheta)^4}{12} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{4}} d\varphi = 2\pi \left[-\frac{\cos(\vartheta)^4}{12} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{4}} = \cdots = \frac{\pi}{8}$$