# Boolesche Algebren und Mengen

In diesem Kapitel wird zunächst die Aussagenlogik entwickelt. Daraus ergeben sich die Prinzipien der Mengenlehre und schließlich auch die der Schaltalgebra. Man abstrahiert daraus die darüberliegende gemeinsame Struktur, die Boolesche Algebra . Abschließend wird der Aufbau der reellen Zahlen, der wichtigsten Menge der Mathematik, dargestellt.

## 1.1 Grundbegriffe der Aussagenlogik

Mathematik besteht zum größten Teil aus Aussagen. ***Aussagen*** sind Sätze, denen eindeutig die Wahrheitswerte wahr (w) oder falsch (f) zugeordnet werden können. Es gibt kein Drittes, das heißt, man hat eine zweiwertige Logik. Aussagen bestehen aus einem ***Subjekt*** und einem ***Prädikat.***

**Beispiel 1.1:**

„Zwei ist eine gerade Zahl“ ist eine Aussage mit dem Wahrheitswert w. Dabei ist „zwei“ das Subjekt und „ist eine gerade Zahl“ das Prädikat.

„Fünf ist kleiner als zwei“ ist eine Aussage mit dem Wahrheitswert f. Dabei ist „Fünf“ das Subjekt und „ist kleiner als zwei“ das Prädikat.

***Aussageformen*** sind Prädikate $A(x)$ mit einem variablen Subjekt $x$, die durch die konkrete Wahl von $x$ zu einer Aussage werden. Im Beispiel 1.1 ist „$x$ ist eine gerade Zahl“ eine Aussageform $A(x)$, die den Wahrheitswert w oder f hat, je nachdem, welche ganze Zahl für $x$ gewählt wird.

**Aussagen** lassen sich **verknüpfen** zu neuen Aussagen mit (ein- oder zweistelligen) Operatoren, genannt ***Junktoren***:

- ***Konjunktion*** („und“ Verknüpfung) $p \wedge q$
- ***Disjunktion*** („oder“ Verknüpfung) $p \vee q$
- ***Negation*** („Negation“) $\neg p$

Die Definitionen der Junktoren und die daraus abgeleiteten Verknüpfungen werden beschrieben durch **Wahrheitstafeln**

| | | und |
|---|---|---|
| p | q | $p \wedge q$ |
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | f |

Xor entspricht umgangssprachlich der Aussage „entweder – oder“ (d.h. dem „oder“).

Die Definitionen der Junktoren und die daraus abgeleiteten Verknüpfungen werden beschrieben durch **Wahrheitstafeln**

| | | oder |
|---|---|---|
| p | q | $p \vee q$ |
| w | w | w |
| w | f | w |
| f | w | w |
| f | f | f |

Xor entspricht umgangssprachlich der Aussage „entweder – oder“ (d.h. dem „oder“).

Die Definitionen der Junktoren und die daraus abgeleiteten Verknüpfungen werden beschrieben durch **Wahrheitstafeln**

| | | Implikation |
|---|---|---|
| p | q | $p \Longrightarrow q$ |
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | w |
| f | f | w |

Xor entspricht umgangssprachlich der Aussage „entweder – oder“ (d.h. dem „oder“).

Die Definitionen der Junktoren und die daraus abgeleiteten Verknüpfungen werden beschrieben durch **Wahrheitstafeln**

| | | und | NAND |
|---|---|---|---|
| p | q | $p \wedge q$ | $p \mid q$ |
| w | w | w | f |
| w | f | f | w |
| f | w | f | w |
| f | f | f | w |

Xor entspricht umgangssprachlich der Aussage „entweder – oder“ (d.h. dem „oder“).

Die Definitionen der Junktoren und die daraus abgeleiteten Verknüpfungen werden beschrieben durch **Wahrheitstafeln**

| | | oder | Äquivalenz | Xor |
|---|---|---|---|---|
| p | q | $p \vee q$ | $p \Leftrightarrow q$ | $\neg (p \Leftrightarrow q)$ |
| w | w | w | w | f |
| w | f | w | f | w |
| f | w | w | f | w |
| f | f | f | w | f |

Xor entspricht umgangssprachlich der Aussage „entweder – oder“ (d.h. dem „oder“).

Die Definitionen der Junktoren und die daraus abgeleiteten Verknüpfungen werden beschrieben durch **Wahrheitstafeln**

| | | Xor |
|---|---|---|
| p | q | $\neg (p \Leftrightarrow q)$ |
| w | w | f |
| w | f | w |
| f | w | w |
| f | f | f |

Xor entspricht umgangssprachlich der Aussage „entweder – oder“ (d.h. dem „oder“).

Die Definitionen der Junktoren und die daraus abgeleiteten Verknüpfungen werden beschrieben durch **Wahrheitstafeln**

| | | und | oder | Implikation | NAND | Äquivalenz | Xor |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p | q | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \Longrightarrow q$ | $p \mid q$ | $p \Leftrightarrow q$ | $\neg (p \Leftrightarrow q)$ |
| w | w | w | w | w | f | w | f |
| w | f | f | w | f | w | f | w |
| f | w | f | w | w | w | f | w |
| f | f | f | f | w | w | w | f |

Xor entspricht umgangssprachlich der Aussage „entweder – oder“ (d.h. dem „oder“).

Durch Vergleich der Wahrheitstafeln ergeben sich die folgenden **„Rechenregeln“:**

$p \wedge q = q \wedge p$ Kommutativgesetze

$p \vee q = q \vee p$

$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$ Assoziativgesetze

$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$

$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ Distributivgesetze

$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$\neg (p \wedge q) = \neg q \vee \neg p$ Morgan-Regeln

$\neg (p \vee q) = \neg q \wedge \neg p$

Wir führen noch folgende Abkürzungen ein:

$$\mathbf{1} \coloneqq q \vee \neg q \quad \text{genannt } \textbf{\textit{Einselement}} \textbf{ (Verum)}$$

$$\mathbf{0} \coloneqq q \wedge \neg q \quad \text{genannt } \textbf{\textit{Nullelement}} \textbf{ (Falsum)}$$

**Bemerkung 1.2:**

Die Aussage **1** ist immer wahr.

Die Aussage **0** ist immer falsch.

Dann gelten die Aussagen:

$\mathbf{1} \wedge q = q$,

$\mathbf{1} \vee q = \mathbf{1}$,

$\mathbf{0} \wedge q = \mathbf{0}$,

$\mathbf{0} \vee q = q$

**Beispiel 1.2:**

für die Aussagen $p$ und $q$ gilt

$(q \vee \neg p) \wedge \neg q =$

$(q \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) =$

$0 \vee (\neg p \wedge \neg q) =$

$(\neg p \wedge \neg q)$

( $=$ bedeutet die Wahrheitstafeln stimmen überein ! )

Zusammengefaßt, haben wir einen neuen Begriff:

**Definition 1.1:**

Alle Aussagen zusammen mit den Junktoren ($\wedge$, $\vee$, $\neg$) bilden die

***Algebra der Aussagenlogik***

Eine Erweiterung der Aussagen sind die sogenannten Quantoren:

**Definition 1.2:**

***Quantoren*** sind Allaussagen bzw. Existenzaussagen. Das heißt

**(1)** Der ***Allquantor*** ist ein verallgemeinertes „und"  Schreibweise:

$$\bigwedge_{\mathbf{x}} A(x)$$

Das heißt: Es für alle $x$ ist $A(x)$ wahr. (Eine andere Schreibweise ist $\forall x\ A(x)$.)

**(2)** Der ***Existenzquantor*** ist ein verallgemeinertes „oder", Schreibweise:

$$\bigvee_x A(x)$$

Das heißt: Es gibt (mindestens) ein $x$, für das $A(x)$ wahr ist. (Eine andere Schreibweise ist $\exists\, x: A(x)$.)

Für Quantoren gibt es auch verallgemeinerte **Morgan-Regeln**:

Die **Negation** des Allquantors ergibt:

$$\neg\left(\bigwedge_{\mathbf{x}} A(x)\right) = \bigvee_{x} \neg A(x) \tag{1.1}$$

Das heißt:

Es gibt (mindestens) ein $x$, sodass gilt: $\neg A(x)$

**Beispiel 1.3** zu (1.1):

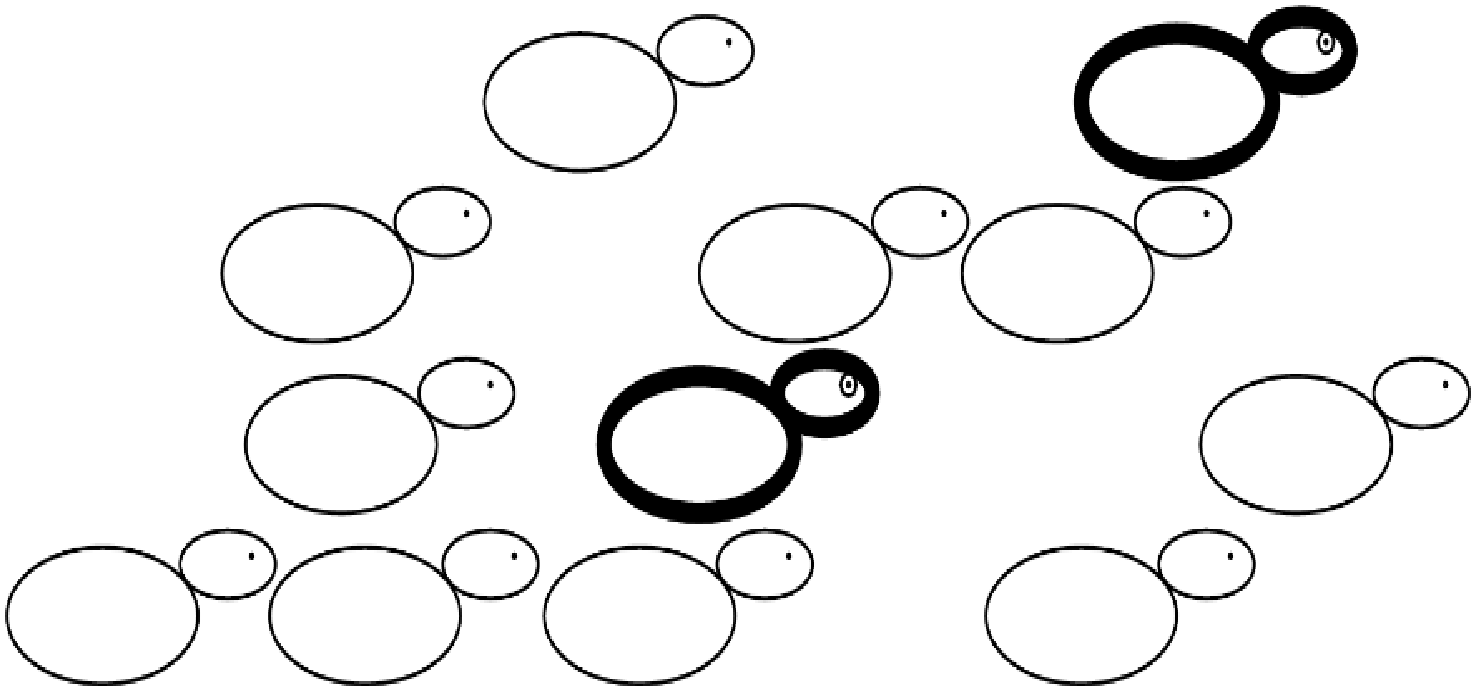
Wenn es nur weiße und schwarze Schwäne gibt und $A(x)$ bedeutet

„der Schwan $x$ ist weiß“, dann gilt:

Die **negierte** Aussage zu „alle Schwäne sind weiß“ (d.h. nicht alle Schwäne sind weiß)

ist äquivalent zu

„es gibt (mindestens) einen schwarzen Schwan“ (s. Abb. 1.1).



**Es gibt mindestens einen schwarzen Schwan**

Die **Negation** des Existenzquantors ergibt:

Das heißt: Für alle $x$ gilt $\neg A(x)$

$$\neg\left(\bigvee_{x} A(x)\right) = \bigwedge_{\mathbf{x}} \neg\, A(x) \tag{1.2}$$

Das heißt: Für alle $x$ gilt $\neg A(x)$

**Beispiel 1.4** zu (1.2):

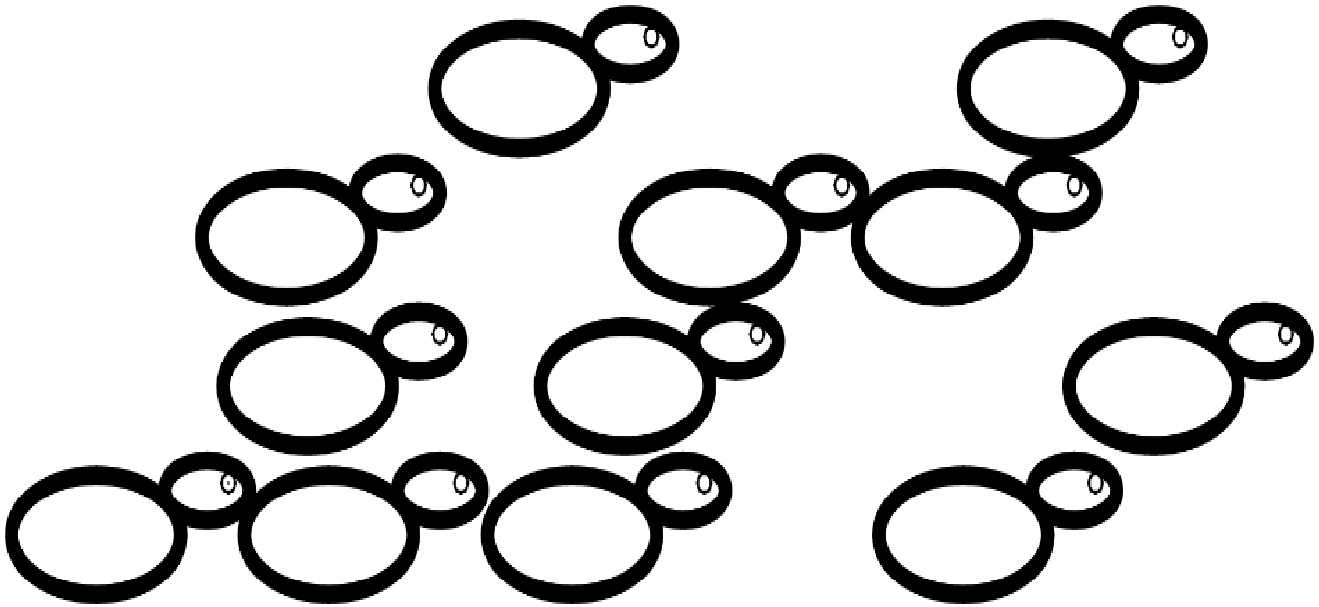
Wenn es nur weiße und schwarze Schwäne gibt und $A(x)$ bedeutet

„der Schwan $x$ ist weiß“, dann gilt:

Die **negierte** Aussage zu „es gibt einen weißen Schwan “ (d.h es gibt **keinen** weißen Schwan )

ist äquivalent zu

„ alle Schwäne sind nicht weiß“ (s. Abb. 1.2).



**Alle Schwäne sind nicht weiß**

## 1.2 Die Mengenalgebra

Was sind Mengen?

Wir benutzen zunächst die Definition von Cantor:

**Definition 1.3:**

***Mengen*** sind Zusammenfassungen von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen. Die so zusammengefassten Objekte heißen ***Elemente*** der Menge (Schreibweise: $x \in \mathbf{A}$ heißt x ist Element von **A**).

Wichtig ist dabei, dass Mengen so definiert sein müssen, dass immer ***eindeutig entscheidbar*** ist, ob ein Element zur Menge gehört oder nicht. Dies ist notwendig, um **Russels Antinomie** zu vermeiden.

B. Russel hat in der “naiven“ Definition von Cantor einen Widerspruch entdeckt.

Das berühmteste Beispiel dazu: In einem Dorf rasiert der Barbier alle Männer, die sich nicht selbst rasieren. Rasiert er sich selbst?

**Fall1**: Er rasiert sich selbst…… -> Widerspruch!

**Fall2**: Er rasiert sich nicht selbst…… -> Widerspruch

Mengen können als ***Aussageformen*** geschrieben werden:

Betrachte die Aussageformen $\mathrm{A}(x)$ und $\mathrm{B}(x)$ dann ist

**A** = $\{x|\ \mathrm{A}(x)$ ist wahr$\}$ =

die Menge aller x mit A(x) ist wahr, Kurzform:

$$\mathbf{A} = \{x|\ \mathrm{A}(x)\}$$

**B** = $\{x|\ \mathrm{B}(x)\ ist\ wahr\}$ **=**

die Menge aller $x$ mit B($x$) ist wahr, Kurzform

$$\mathbf{B} = \{x|\ \mathrm{B}(x)\}.$$

Damit können wir definieren:

***Schnittmenge*** $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} := \{x \mid x \in \mathbf{A} \wedge x \in \mathbf{B}\}$

***Vereinigungsmenge*** $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} := \{x \mid x \in \mathbf{A} \vee x \in \mathbf{B}\}$

***Differenzmenge*** $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} := \{x \mid x \in \mathbf{A} \wedge \neg x \in \mathbf{B}\}$

***Leere Menge*** $\boldsymbol{\phi} := \{x \mid x \in \mathbf{A} \wedge \neg x \in \mathbf{A}\}$

**A *ist Teilmenge von* B**: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, wenn gilt $(\mathrm{A}(x) \Longrightarrow \mathrm{B}(x))$

d.h. wenn gilt $x \in \mathbf{A}$ , dann gilt $x \in \mathbf{B}$.

Sprechweisen dazu sind:

$\mathbf{A \cap B}$: **A** geschnitten mit **B**

$\mathbf{A \cup B}$: **A** vereinigt mit **B**

$\mathbf{A \setminus B}$: Differenz **A** ohne **B**

$\mathbf{(A \cup B) \setminus (A \cap B)}$: entweder **A** oder **B**

Mengen haben zusammen mit ihren Verknüpfungen eine Struktur, die aus der Aussagenlogik erzeugt wird. Wir definieren daher:

**Definition 1.4:**

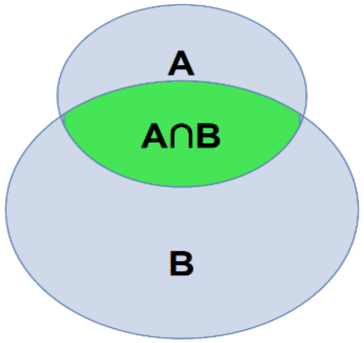
- Die Menge aller Teilmengen P(M) einer gegebenen Grundmenge M (einschließlich der leeren Menge $\boldsymbol{\phi}$) heißt ***Potenzmenge von M*** und hat die „Verknüpfungen“ $A \cap B$, $A \cup B$.

- Das Komplement CA von A ist definiert als $CA := M \setminus A$.

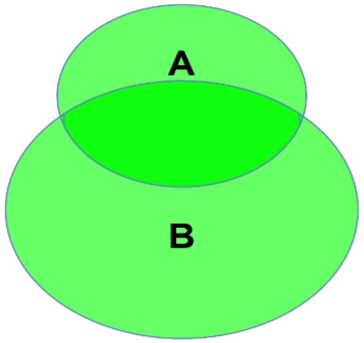
- Die Potenzmenge P(M) zusammen mit den Mengenoperationen $\cap$, $\cup$ und C, $\{P(M), \cap, \cup\ C\}$ heißt die ***Mengenalgebra von M.***

# Venn Diagramme

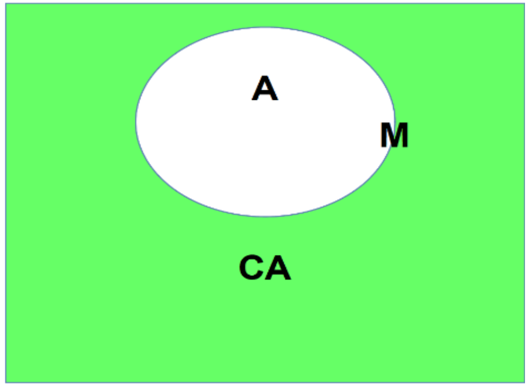
stellen die Verknüpfungen auf P(M) grafisch dar



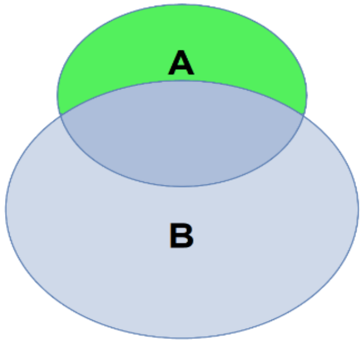

A∩B



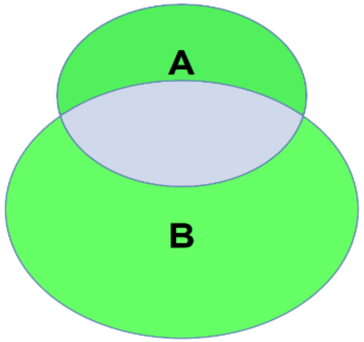

A∪B



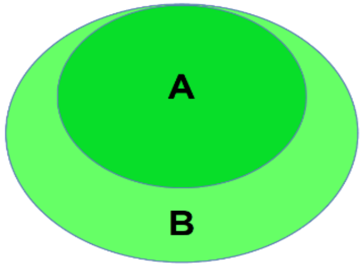

CA=M\A




A\B




(A∪B)\(A∩B)

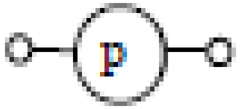


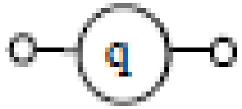

A⊂B

## 1.3 Die Schaltalgebra

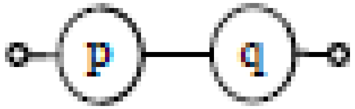
Eine technische Realisierung von Aussagen sind **Schalter** in elektrischen Stromkreisen, die offen oder geschlossen sein können. Andere Realisierungen sind **logische Bauelemente**, die binäre Zustände 1 oder 0 haben können.

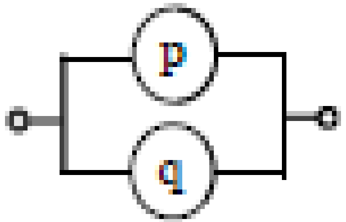
Wenn man solche Schalter zu Schaltungen zusammensetzt, entstehen Schaltzustände, die den Aussagen in der Aussagenlogik entsprechen.

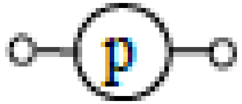
Seien 

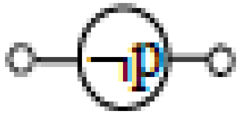
und 

Schalter. Dann werden die Aussagen wie folgt realisiert:

- Die „und"-Aussage $p \wedge q$ durch Reihenschaltung 

- Die „oder" Aussage $p \vee q$ durch Parallelschaltung 

- Die Negation von 

durch die entgegengesetzte Schalterstellung 

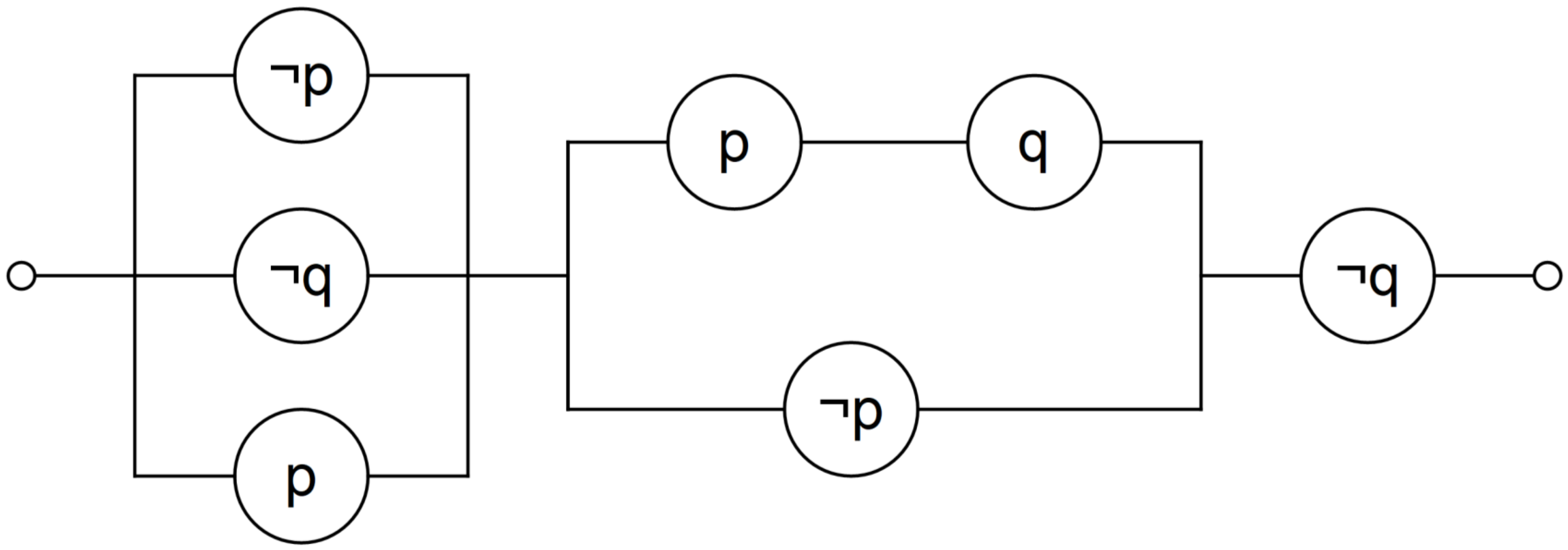
- Die „Eins"-Aussage (die immer wahr ist) durch den immer geschlossenen Schalter 
- Die „Null"-Aussage (die immer falsch ist) durch den immer offenen Schalter 

**Definition 1.5:**

Alle Schalter zusammen mit den Schalterzuständen heißen ***Schaltalgebra***.

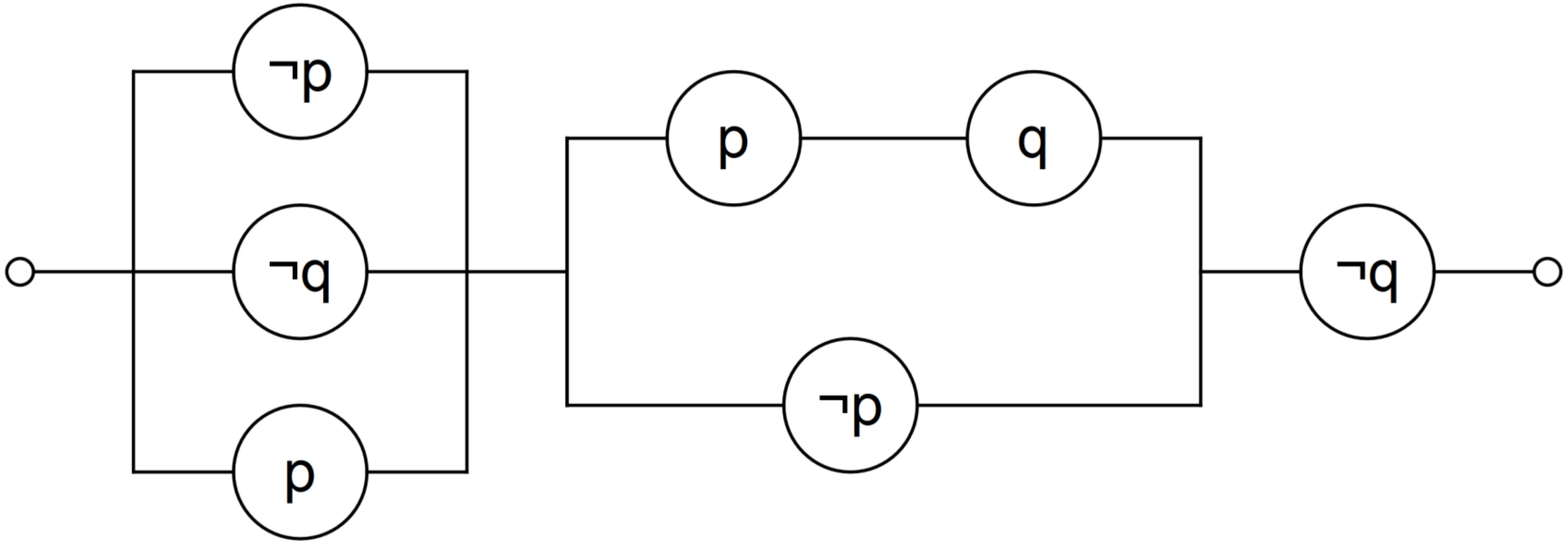
**Beispiel 1.5:**

Betrachte die Schaltung



Diese Schaltung wird mit der **Aussagenlogik** beschrieben durch:

$$\big((\neg p \vee \neg q) \vee p\big) \wedge \big((p \wedge q) \vee \neg p\big) \wedge \neg q$$



Diese Schaltung wird mit der **Aussagenlogik** beschrieben durch:

$$\big((\neg p \vee \neg q) \vee p\big) \wedge \big((p \wedge q) \vee \neg p\big) \wedge \neg q$$

$$= \big((\neg p \vee p) \vee \neg q)\big) \wedge \big((p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p)\big) \wedge \neg q \qquad \text{Assoz.,Distr.+ Komm. Ges.}$$

Diese Schaltung wird mit der **Aussagenlogik** beschrieben durch:

$$\big((\neg p \vee \neg q) \vee p\big) \wedge \big((p \wedge q) \vee \neg p\big) \wedge \neg q$$

$$= \big((\neg p \vee p) \vee \neg q)\big) \wedge \big((p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p)\big) \wedge \neg q \qquad \text{Assoz.,Distr.+ Komm. Ges.}$$

$$= \big((\mathbf{1} \vee \neg q)\big) \wedge \big((\mathbf{1}) \wedge (q \vee \neg p)\big) \wedge \neg q \qquad \neg p \vee p = \mathbf{1}$$

Diese Schaltung wird mit der **Aussagenlogik** beschrieben durch:

$$\big((\neg p \vee \neg q) \vee p\big) \wedge \big((p \wedge q) \vee \neg p\big) \wedge \neg q$$

$$= \big((\neg p \vee p) \vee \neg q)\big) \wedge \big((p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p)\big) \wedge \neg q \qquad \text{Assoz.,Distr.+ Komm. Ges.}$$

$$= \big((\mathbf{1} \vee \neg q)\big) \wedge \big((\mathbf{1}) \wedge (q \vee \neg p)\big) \wedge \neg q \qquad \neg p \vee p = \mathbf{1}$$

$$= \mathbf{1} \wedge (q \vee \neg p) \wedge \neg q \qquad (\mathbf{1} \vee \neg q) = \mathbf{1}, (\mathbf{1} \wedge \neg q) = \neg q$$

Diese Schaltung wird mit der **Aussagenlogik** beschrieben durch:

$$\big((\neg p \vee \neg q) \vee p\big) \wedge \big((p \wedge q) \vee \neg p\big) \wedge \neg q$$

$$= \big((\neg p \vee p) \vee \neg q)\big) \wedge \big((p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p)\big) \wedge \neg q \qquad \text{Assoz.,Distr.+ Komm. Ges.}$$

$$= \big((\mathbf{1} \vee \neg q)\big) \wedge \big((\mathbf{1}) \wedge (q \vee \neg p)\big) \wedge \neg q \qquad \neg p \vee p = \mathbf{1}$$

$$= \mathbf{1} \wedge (q \vee \neg p) \wedge \neg q \qquad (\mathbf{1} \vee \neg q) = \mathbf{1}, (\mathbf{1} \wedge \neg q) = \neg q$$

$$= (q \vee \neg p) \wedge \neg q \qquad (\mathbf{1} \wedge r) = \boldsymbol{r}$$

Diese Schaltung wird mit der **Aussagenlogik** beschrieben durch:

$$\big((\neg p \vee \neg q) \vee p\big) \wedge \big((p \wedge q) \vee \neg p\big) \wedge \neg q$$

$$= \big((\neg p \vee p) \vee \neg q)\big) \wedge \big((p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p)\big) \wedge \neg q \qquad \text{Assoz.,Distr.+ Komm. Ges.}$$

$$= \big((\mathbf{1} \vee \neg q)\big) \wedge \big((\mathbf{1}) \wedge (q \vee \neg p)\big) \wedge \neg q \qquad \neg p \vee p = \mathbf{1}$$

$$= \mathbf{1} \wedge (q \vee \neg p) \wedge \neg q \qquad (\mathbf{1} \vee \neg q) = \mathbf{1}, (\mathbf{1} \wedge \neg q) = \neg q$$

$$= (q \vee \neg p) \wedge \neg q \qquad (\mathbf{1} \wedge r) = \boldsymbol{r}$$

$$= (q \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \qquad \text{Distrib. Ges.}$$

Diese Schaltung wird mit der **Aussagenlogik** beschrieben durch:

$$\big((\neg p \vee \neg q) \vee p\big) \wedge \big((p \wedge q) \vee \neg p\big) \wedge \neg q$$

$$= \big((\neg p \vee p) \vee \neg q)\big) \wedge \big((p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p)\big) \wedge \neg q \qquad \text{Assoz.,Distr.+ Komm. Ges.}$$

$$= \big((\mathbf{1} \vee \neg q)\big) \wedge \big((\mathbf{1}) \wedge (q \vee \neg p)\big) \wedge \neg q \qquad \neg p \vee p = \mathbf{1}$$

$$= \mathbf{1} \wedge (q \vee \neg p) \wedge \neg q \qquad (\mathbf{1} \vee \neg q) = \mathbf{1}, (\mathbf{1} \wedge \neg q) = \neg q$$

$$= (q \vee \neg p) \wedge \neg q \qquad (\mathbf{1} \wedge r) = \boldsymbol{r}$$

$$= (q \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \qquad \text{Distrib. Ges.}$$

$$= \mathbf{0} \vee (\neg p \wedge \neg q) \qquad (q \wedge \neg q) = \mathbf{0}$$

Diese Schaltung wird mit der **Aussagenlogik** beschrieben durch:

$$\big((\neg p \vee \neg q) \vee p\big) \wedge \big((p \wedge q) \vee \neg p\big) \wedge \neg q$$

$$= \big((\neg p \vee p) \vee \neg q)\big) \wedge \big((p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p)\big) \wedge \neg q \qquad \text{Assoz.,Distr.+ Komm. Ges.}$$

$$= \big((\mathbf{1} \vee \neg q)\big) \wedge \big((\mathbf{1}) \wedge (q \vee \neg p)\big) \wedge \neg q \qquad \neg p \vee p = \mathbf{1}$$

$$= \mathbf{1} \wedge (q \vee \neg p) \wedge \neg q \qquad (\mathbf{1} \vee \neg q) = \mathbf{1}, (\mathbf{1} \wedge \neg q) = \neg q$$

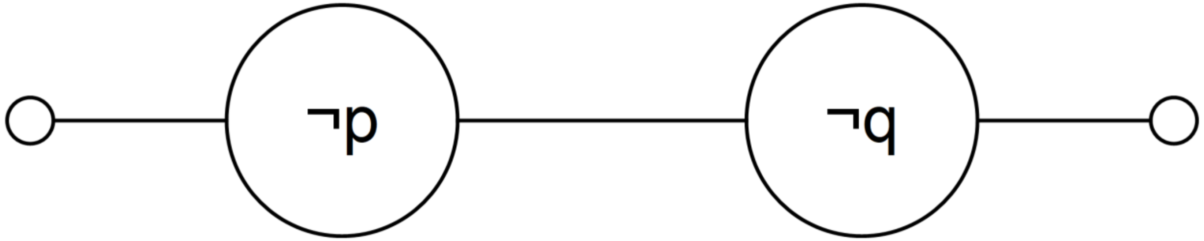
$$= (q \vee \neg p) \wedge \neg q \qquad (\mathbf{1} \wedge r) = \boldsymbol{r}$$

$$= (q \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \qquad \text{Distrib. Ges.}$$

$$= \mathbf{0} \vee (\neg p \wedge \neg q) \qquad (q \wedge \neg q) = \mathbf{0}$$

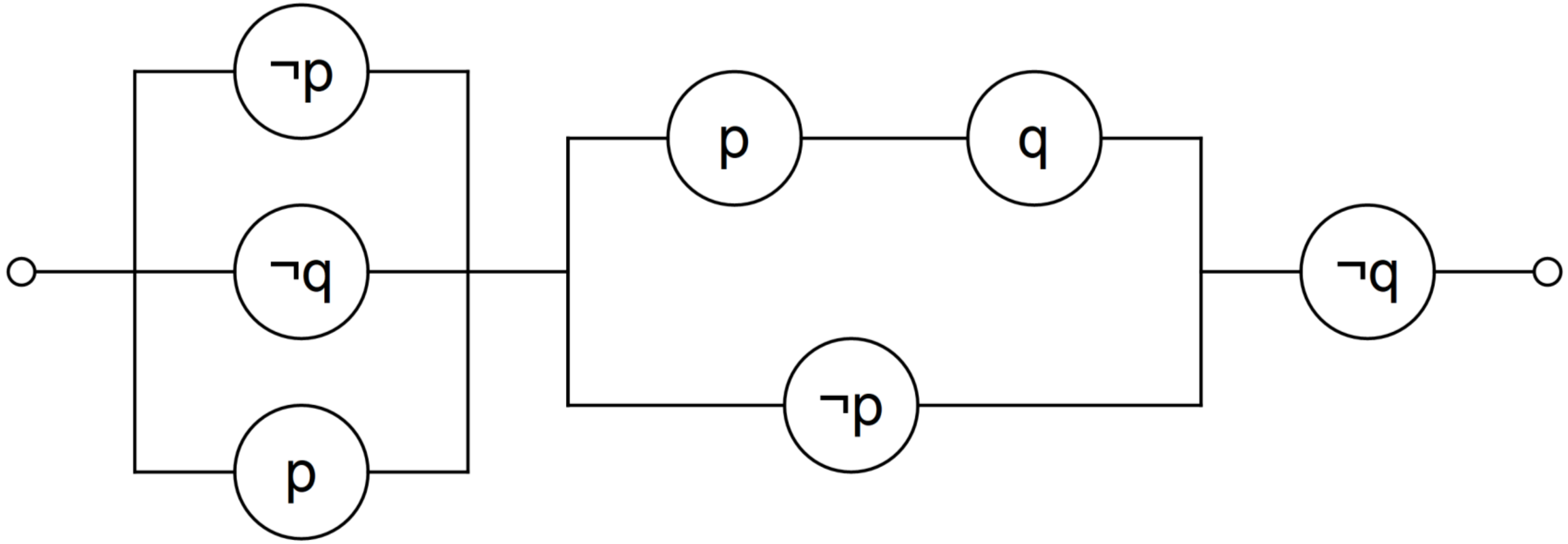
$$= (\neg p \wedge \neg q) \qquad (\mathbf{0} \vee r) = \boldsymbol{r}$$

Das bedeutet, dass die obige Schaltung äquivalent ist zur Schaltung:

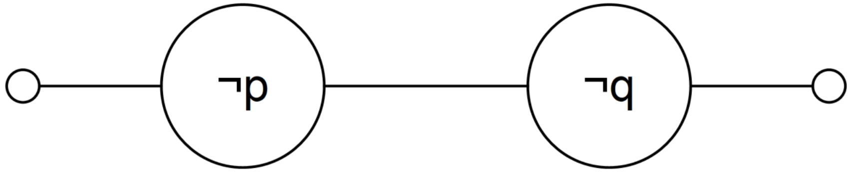



$$(\neg p \land \neg q)$$

Also




=



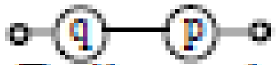
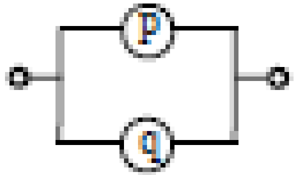
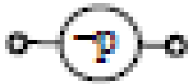
## 1.4 Boolsche Algebra

Zusammengefasst sehen wir: Die Algebra der Aussagenlogik, die Mengenalgebra und die Schaltalgebra haben die gleiche Struktur. Dies führt zur

**Definition 1.6:**

Die gemeinsame Struktur von Aussagenlogik, Mengenalgebra und Schaltalgebra wird abstrahiert und heißt dann ***Boolesche Algebra***.

Anders gesagt: Die Algebra der Aussagenlogik, die Mengenalgebra und die Schaltalgebra sind Boolesche Algebren (s. Tabelle)

| Operator | Aussagenlogik | Mengenalgebra | Schaltalgebra | Bedeutung |
|---|---|---|---|---|
| Konjunktion | $p \wedge q$ | A∩B<br>Schnittmenge | <br>Reihensch. | „und“ |
| Disjunktion | p∨q | A∪B<br>Vereinigung | <br>Parallelsch. | „oder“ |
| Negation | ¬ p | CA<br>Komplement<br>von A zu M | <br>Schalterumkehr | „nicht“ |
| Eins | 1 | M<br>Grundmenge | <br>geschlossen | Einselement |
| Null | 0 | ϕ<br>leere Menge | <br>offen | Nullelement |

**Boolesche Algebren**

## 1.5 Die Menge der reellen Zahlen

Ausgehend von der Menge der ***natürlichen Zahlen*** $\mathbb{N} := \{0,1,2,3, \ldots\}$ kann man durch sukzessive Erweiterung der Rechenoperationen die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, dann die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und schließlich die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ einführen.

## 1.5 Die Menge der reellen Zahlen

Ausgehend von der Menge der ***natürlichen Zahlen*** $\mathbb{N}$**:={0,1,2,3, …}** kann man durch sukzessive Erweiterung der Rechenoperationen die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, dann die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und schließlich die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ einführen.

Zwei natürliche Zahlen kann man addieren und erhält dann wieder eine natürliche Zahl. Die Subtraktion a - b zweier natürlicher Zahlen führt aber zu „negativen" Zahlen, wenn b größer ist als a. Deshalb erweitert man die natürlichen Zahlen zur Menge der ***ganzen Zahlen***. Das ist die Menge der negativen und positiven natürlichen Zahlen sowie die Zahl 0:

$$\mathbb{Z} := \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

## Die Rationalen Zahlen

Die ganzen Zahlen können miteinander multipliziert werden und man erhält wieder ganze Zahlen. Wenn man aber ganze Zahlen durcheinander dividiert, entstehen im Allgemeinen „Brüche“, die man nicht immer zu einer ganzen Zahl „kürzen“ kann.

Dies motiviert die Erweiterung der ganzen Zahlen zur Menge der

***rationalen Zahlen**.* Das ist die Menge aller Brüche von ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Q} := \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

**Die Rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$**

Es gilt:

Wenn $p \in \mathbb{Q}, \text{und } q \in \mathbb{Q}$

dann sind auch, $p + q$, $p - q$, $p \cdot q$, $p/q$ für $q \neq 0$ in $\mathbb{Q}$

ebenso ist

$$p^2 \in \mathbb{Q}$$

Aber was ist mit $\sqrt{2}$ ?

Man kann aber zeigen, daß $\sqrt{2}$ **keine** rationale Zahl ist (Hippasos).

Ebenso sind die Zahlen $\pi$ und die Eulersche Zahl $e$ nicht in $\mathbb{Q}$**.**

## Die Reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Diese Zahlen (z.B. $\sqrt{2}$ , π oder $e$ ) werden mit Hilfe von Näherungsverfahren approximiert. Es entstehen dabei Zahlenmengen, genannt **Folgen** (genauer: Cauchy Folgen), die sich in der Nähe eines Wertes, des Grenzwertes **g**, immer mehr verdichten. Man sagt: Die Folgen konvergieren gegen den **Grenzwert g**.

Die Besonderheit dieser Folgen ist, dass die Folgenglieder rational sind, aber der Grenzwert nicht.

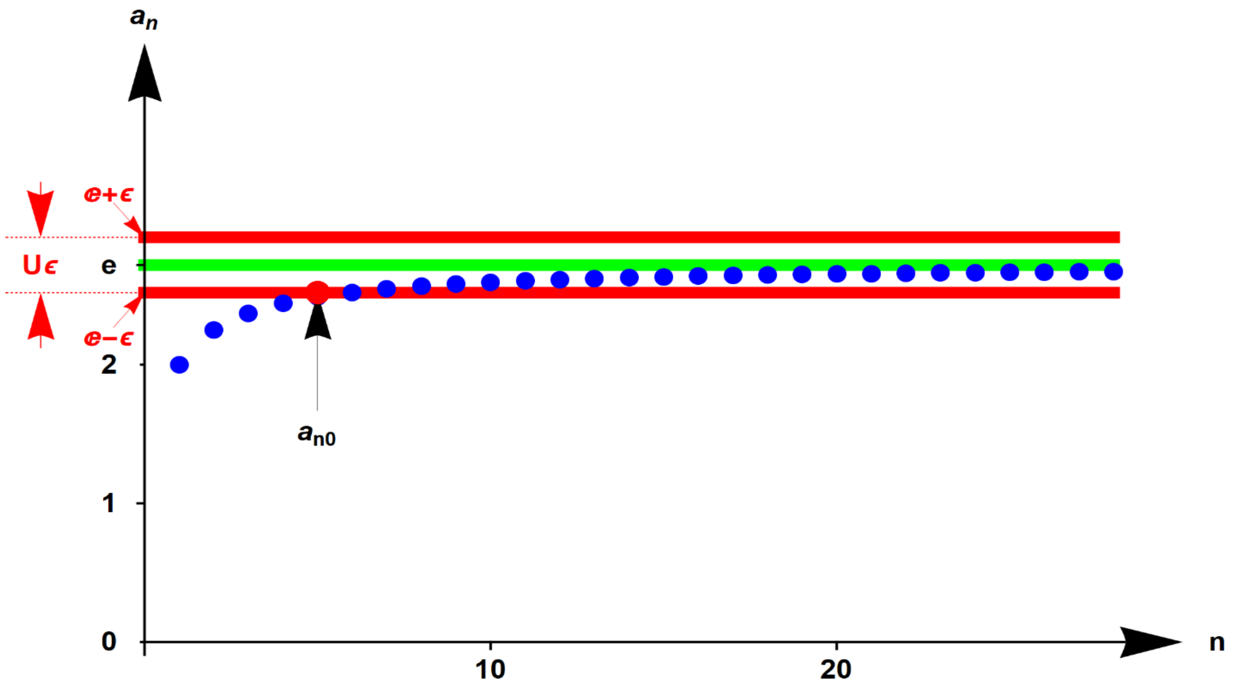
Zum Beispiel, die Zahlenfolge

$$(1+1)^1, (1+\tfrac{1}{2})^2, (1+\tfrac{1}{3})^3, (1+\tfrac{1}{10})^{10}, .., (1+\tfrac{1}{100})^{100}, .. ,(1+\tfrac{1}{1000})^{1000}, . . ,(1+\tfrac{1}{10000})^{10000}$$

2 , 2.25 , 2.37,. . .,2.59374,. . ., 2.70484, . . . ,2.71692, . . . . , 2.71815

d.h. die Zahlen $(1+\frac{1}{n})^n$ für immer weiter wachsende $n$ $\epsilon\mathbb{N}$**,** konvergieren gegen den Grenzwert $e = 2.71828 \ldots \ldots$ die (nicht rationale) ***Eulersche Zahl***!

# *e*- Folge grafisch




http://sn.pub/HP3F9d

anderes Beispiel:

**Babylonisches Wurzelziehen** $\sqrt{2}$:

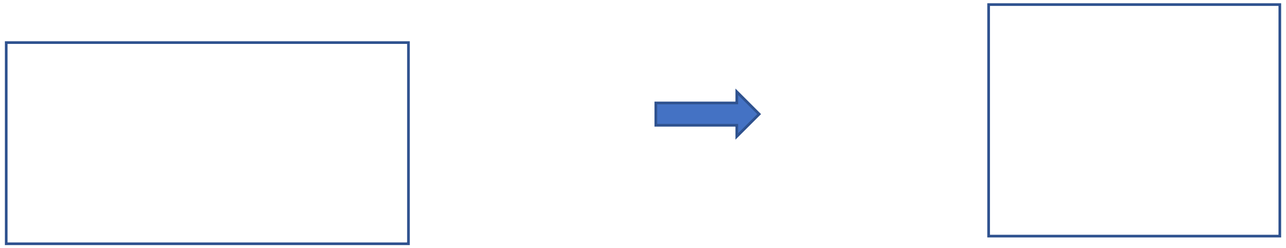
$\frac{1}{2}(2+1)$, $\frac{1}{2}(1.5+\frac{2}{1.5})$, $\frac{1}{2}(1.4166+\frac{2}{1.4166})$, $\frac{1}{2}(1.4122+\frac{2}{1.41422})$,

1.5 , 1.4166… , 1.41422… , 1.41421…,

d.h. die iterative Folge $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$ für immer weiter wachsende $n \in \mathbb{N}$, konvergiert gegen den (nicht rationalen) Grenzwert

$g = \sqrt{2} = 1.41421 \ldots\ldots$

**Begründung:** Ein Rechteck mit der Grundlinie $a_n$ >2 und der Höhe $\frac{2}{a_n}$ hat den Flächeninhalt $a_n \cdot \frac{2}{a_n} = 2$ . Durch Mittelwertbildung zwischen Grundlinie und Höhe entsteht ein neues Rechteck mit der Grundlinie $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$, der Höhe $\frac{2}{a_{n+1}}$ und dem Flächeninhalt $a_{n+1} \cdot \frac{2}{a_{n+1}} = 2$ .



Daraus ergibt sich die

Iterationsformel für die Grundlinie:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

Geometrisch ist klar, dass die Grundlinie immer kleiner wird und die Höhe immer größer und das entsprechende Rechteck zu einem Quadrat mit dem Flächeninhalt 2 „konvergiert“.

Wenn man nun alle solche konvergenten Folgen, deren Grenzwerte nicht in $\mathbb{Q}$ liegen, einbezieht, entsteht eine erweiterte Menge. Damit wird die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ wiederum vervollständigt zur Menge der ***reellen Zahlen*** $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ besteht dann neben $\mathbb{Q}$ aus allen Grenzwerten von konvergenten Folgen.

Wenn man nun alle solche konvergenten Folgen, deren Grenzwerte nicht in $\mathbb{Q}$ liegen, einbezieht, entsteht eine erweiterte Menge. Damit wird die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ wiederum vervollständigt zur Menge der ***reellen Zahlen*** $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ besteht dann neben $\mathbb{Q}$ aus allen Grenzwerten von konvergenten Folgen.

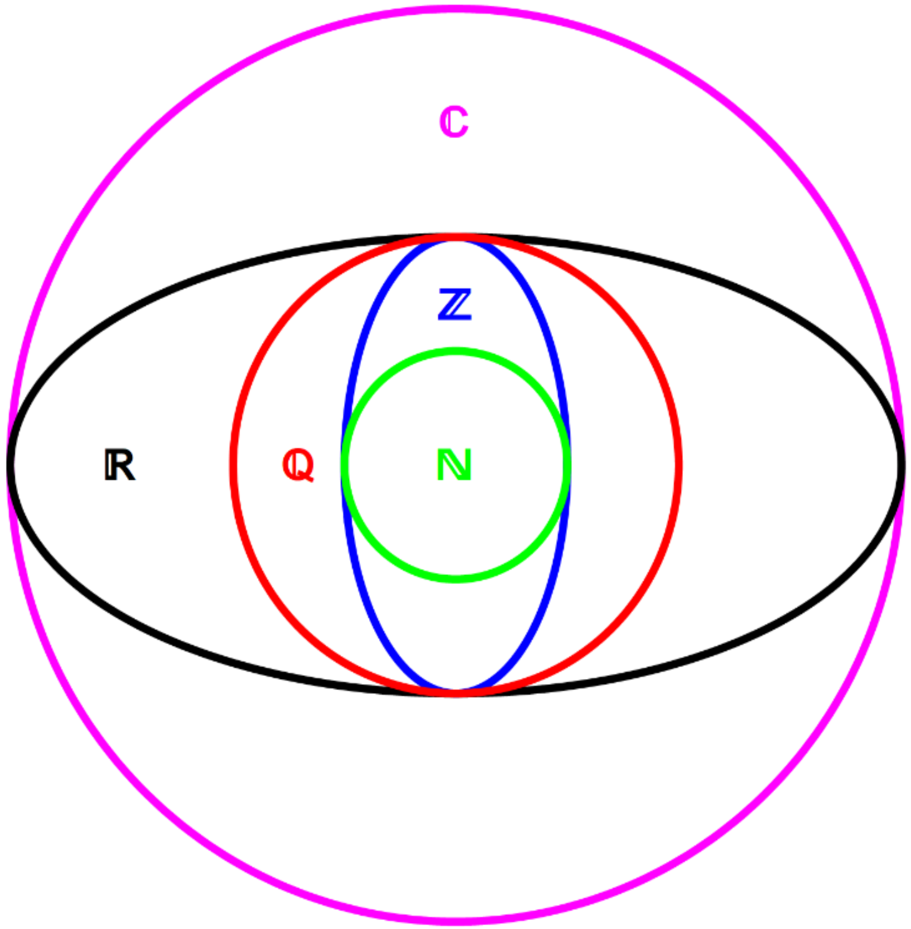
Eine letzte Erweiterung ist notwendig, wenn man alle Lösungen von quadratischen Gleichungen wie $x^2 + 1 = 0$ hinzufügt. Dies führt dann zu den ***komplexen Zahlen*** $\mathbb{C}$ .

Es gilt also :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Es gilt also :

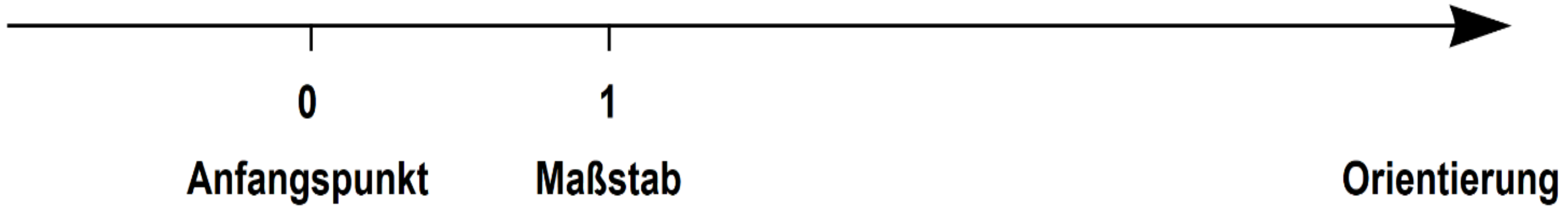
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$



**Eigenschaften der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind:**

- Die Operationen +, -,$\cdot$, : führen nicht aus $\mathbb{R}$ hinaus.
- $\mathbb{R}$ ist ***geordnet***, das heißt, für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ gilt immer $a < b$ oder $a > b$.
- $\mathbb{R}$ ist ***überall dicht***, das heißt, für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ gibt es **immer** eine Zahl $c = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{R}$ mit $a < c$ und $c < b$
- $\mathbb{R}$ ist ***vollständig***, das heißt, alle Cauchy-Folgen haben Grenzwerte in $\mathbb{R}$.

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ können dargestellt werden durch die ***Zahlengerade***




Man sagt: $\mathbb{R}$ ***ist ein vollständiger geordneter Körper***