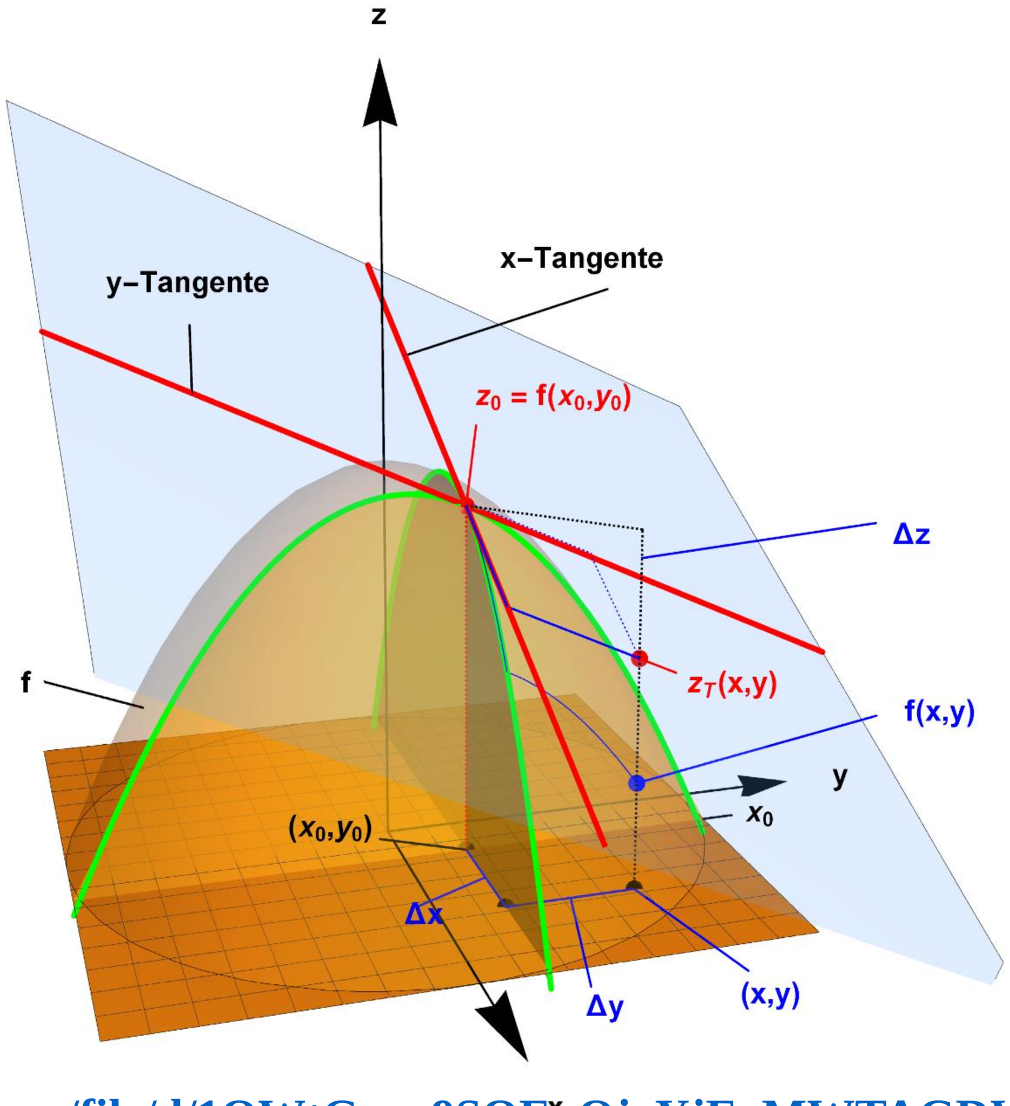
Differentialrechnung im Mehrdimensionalen

3. Teil

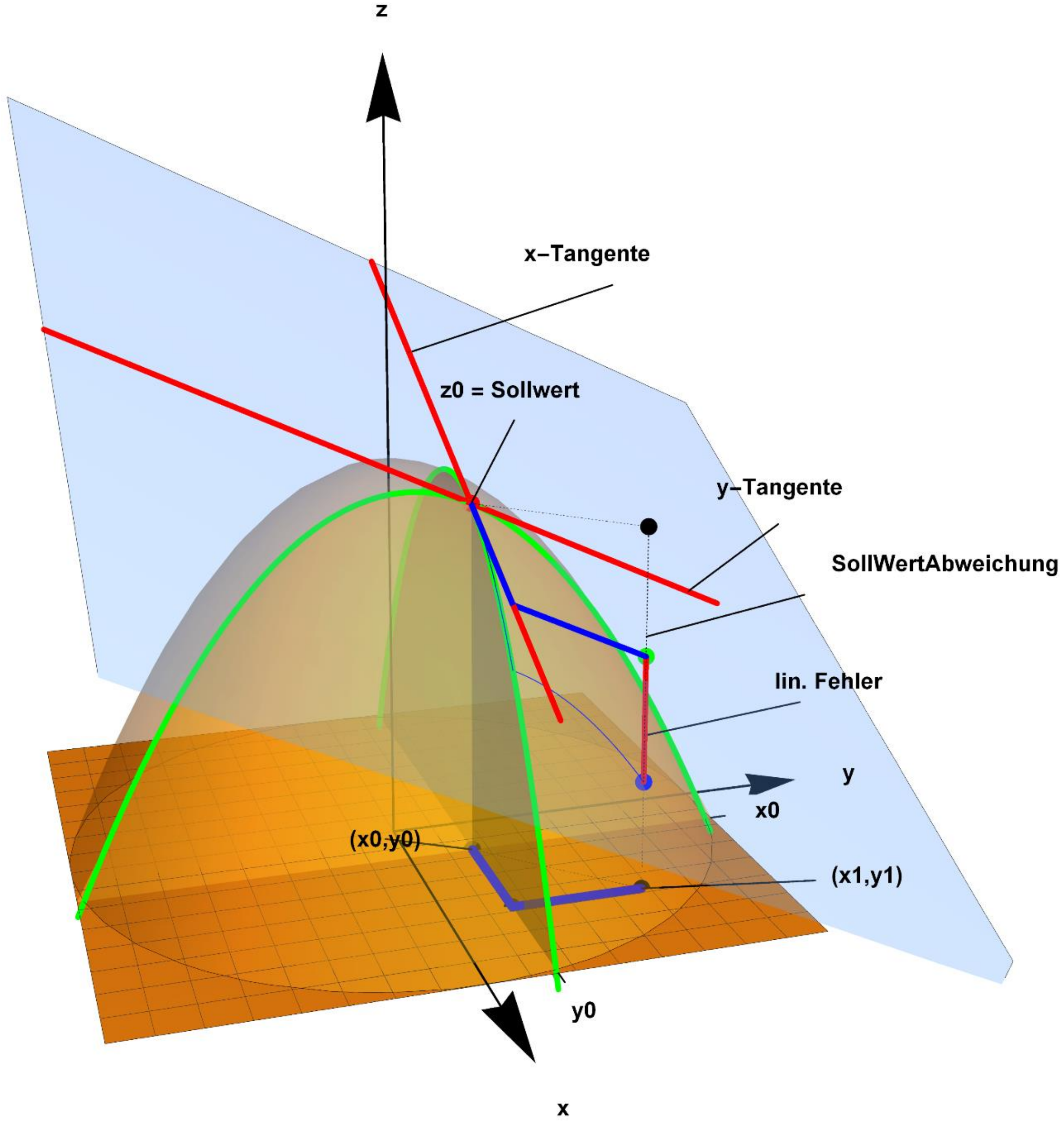
Partielle Ableitungen

Tangentialebene als Linearisierung

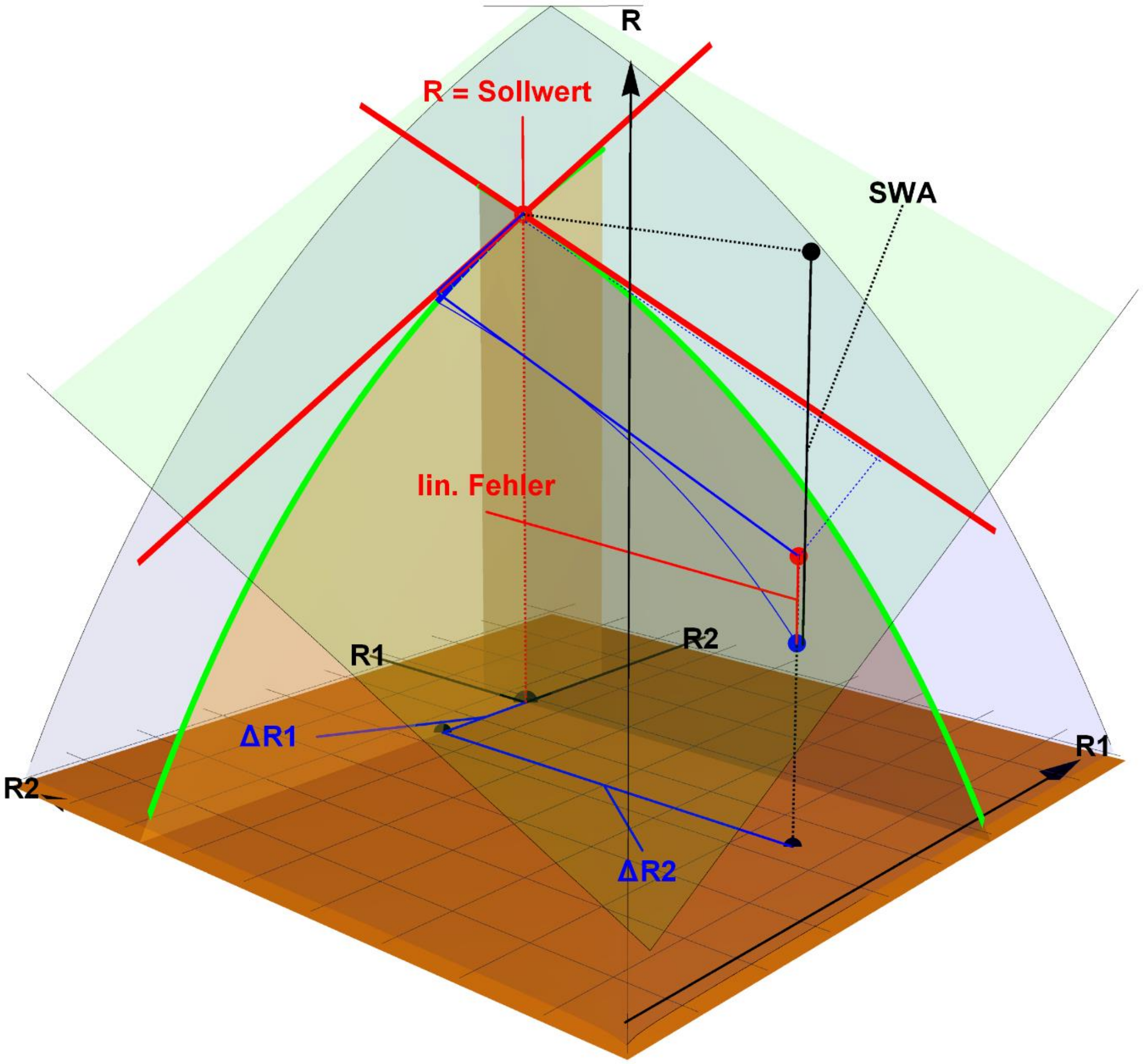


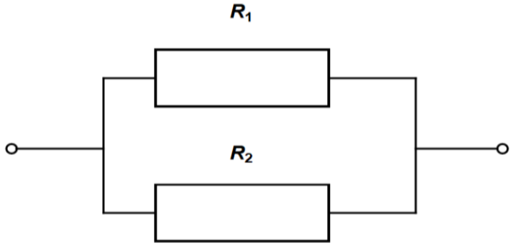
https://drive.google.com/file/d/1OWtGo_o9SQEpQjgYjEaMWTAGDWFPG3WW/view?usp=sharing

Tangentialebene, Sollwert-Abweichung und linearem Fehler



Parallelschaltung von Widerständen





$$R = R(R_1, R_2) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{max} = \frac{(R_1 + \Delta R_1)(R_2 + \Delta R_2)}{(R_1 + \Delta R_1) + (R_2 + \Delta R_2)}$$

SWA: $\Delta R_{max} = R_{max} - R$

linearisierte SWA:

$$\Delta R = \frac{\partial R}{\partial R_1}\Delta R_1 + \frac{\partial R}{\partial R_2}\Delta R_2$$

linearer Fehler = $\Delta R - \Delta R_{max}$

Vollständiges Differential

Gegeben sei $f(x, y)$

Mit der Tangentialebene

$$z_T(x, y) = T(x, y) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

und $$z_0 = f(x_0, y_0)$$

kann man den „Höhenunterschied“ auf der Tangentialebene beschreiben:

$$\Delta z = z_T(x, y) - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Mit

$$\Delta z := z_T(x,y) - z_0, \qquad \Delta x := (x - x_0) \qquad \Delta y := (y - y_0)$$

ergibt sich

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y.$$

Die Schreibweise

$$\Delta z = dz, \qquad \Delta x = dx \qquad \Delta y = dy$$

Ergibt den Ausdruck

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)\,dy.$$

Dann heißt

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)\, dy$$

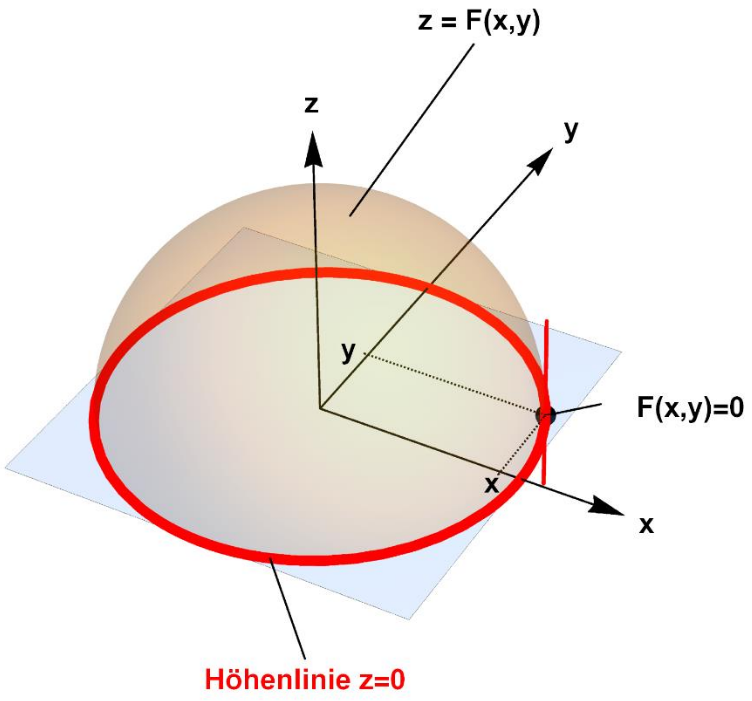
Totales oder ***Vollständiges Differential*** von f an der Stelle (x, y)

Implizite Ableitung

Gegeben sei die Implizite Funktion $\mathrm{z} = F(x, y)$=0

Dies ist die Gleichung der Höhenlinie der Flächenfunktion in3D

$$\mathrm{z} = F(x, y) \quad \text{für z = 0}$$



Die Ableitung von

$$z = F(x, y) = 0$$

nach *x* ergibt mit der Kettenregel:

$$F_x(x, y) + F_y(x, y)\ \frac{dy}{dx} = 0$$

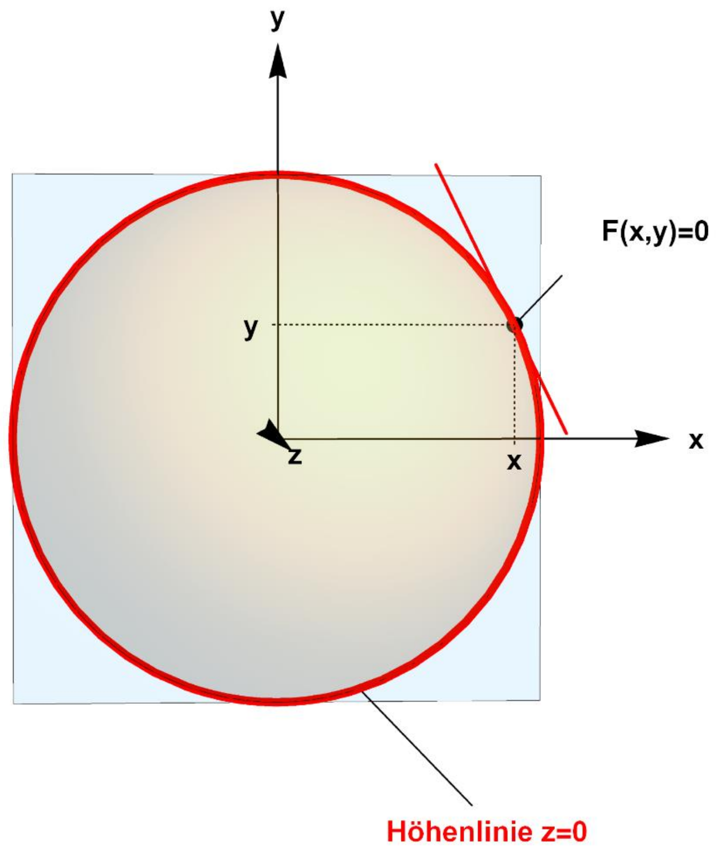
Daraus folgt für die Ableitung von y(x):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\mathrm{F}_x(x,y)}{\mathrm{F}_y(x,y)}, \quad \text{falls } F_y(x, y) \neq 0$$

Damit haben wir die **Definition :**

$$y'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

heißt ***implizite Ableitung von y(x)***.



Implizite Funktion als Höhenlinie

Beispiel: Betrachte die implizite Funktion

$$F(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} = 0.$$

Dann ist

$$F_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}} \quad \text{und} \quad F_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}$$

und die **implizite Ableitung** von $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{x}{y} \qquad \text{Probe?}$$

Taylor-Polynom 2. Grades $\boldsymbol{T_2}$

Gegeben sei $f(x, y)$

Dann ist T_2 gegeben durch:

$$T_2(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}_{T_1(x,y)} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)$$

Beispiel: Betrachte

$$z = f(x, y) = 2\sin(x)\sin(y) + 2$$

und

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right).$$

Dann ist

$$f(x_0, y_0) = 0$$

$$f_x(x_0, y_0) = 2\cos(\mathrm{x})\sin(\mathrm{y}) = 0$$

$$f_y(x_0, y_0) = 2\sin(\mathrm{x})\cos(\mathrm{y}) = 0$$

$$f_{xx}(x_0, y_0) = -2\sin(\mathrm{x})\sin(\mathrm{y}) = 2$$

$$f_{xy}(x_0, y_0) = 2\cos(\mathrm{x})\cos(\mathrm{y}) = 0$$

$$f_{yy}(x_0, y_0) = -2\sin(\mathrm{x})\sin(\mathrm{y}) = 2$$

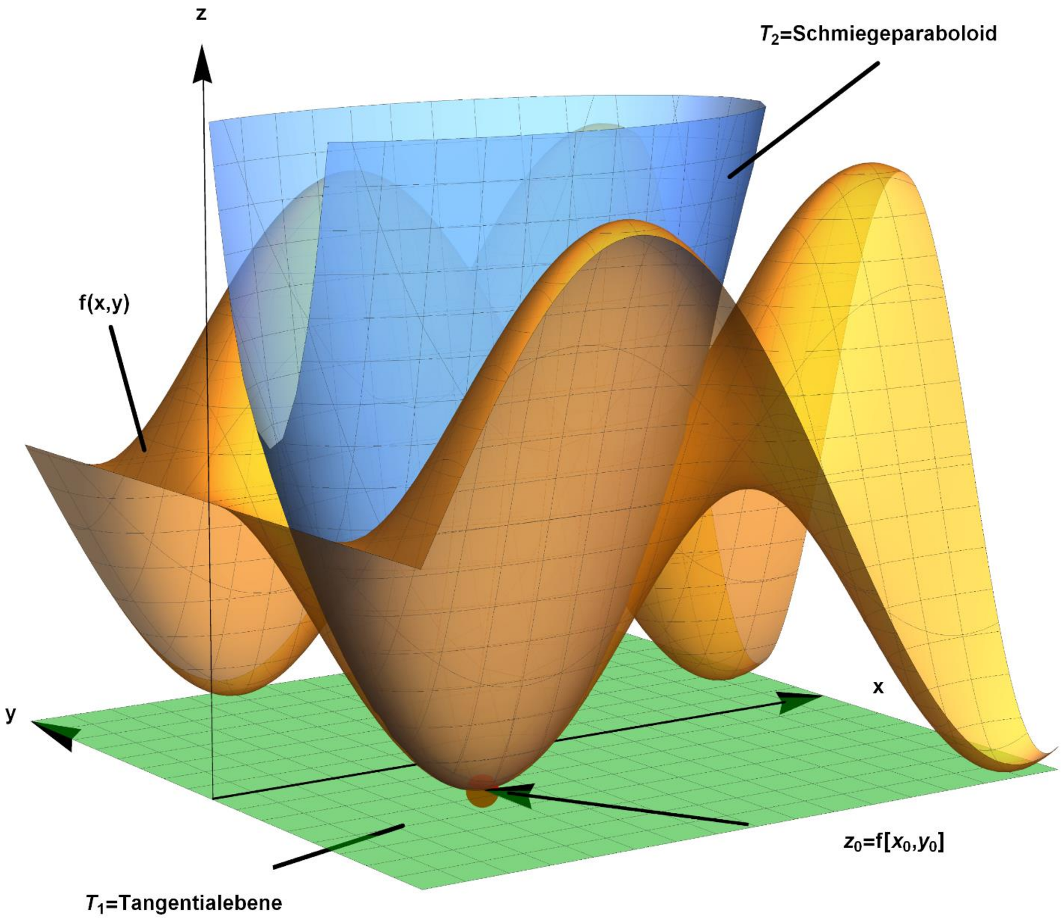
Somit ist die Tangentialebene an der Stelle $\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$:

$$T_1(x, y) = 0$$

$T_2(x, y)$ ist das „Schmiegeparaboloid“ an der Stelle $\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$:

$$T_2(x, y) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\pi}{2}\right)^2$$

Fläche mit Taylor-Polynom 2. Grades



https://drive.google.com/file/d/1USQP1P4D_UxNOBSUz6Xn2FwnmrvvXXI0/view?usp=sharing