Komplexe Zahlen und komplexe Abbildungen
Teil 1

Komplexe Zahlen erweitern den Bereich der reellen Zahlen. Dies ist nicht nur eine rein mathematische Erweiterung (man kann nun alle quadratischen Gleichungen lösen), sondern komplexe Zahlen führen auch mit Hilfe der Eulerschen Gleichungen zu vereinfachten Schreibweisen in der Elektrotechnik.

Themen sind

- Einführung komplexer Zahlen
- Gaußsche Zahlenebene
- Komplexwertige Funktionen (Potenz,Wurzel, Logarithmus)
- Konforme Abbildungen

3.1 Einführung in die komplexen Zahlen

Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine reellwertige Lösung. Das heißt, es gibt keine reelle Zahl x mit $x^2 = -1$.

Wie wir später sehen werden, ist die Gleichung $x^2 = -1$ im Komplexen nicht eindeutig lösbar, wenn man den Definitionsbereich der Wurzelfunktion in den negativen Zahlenbereich erweitert

Dort wird gezeigt, dass gilt $\sqrt{-1} = \pm$ j.

Definition 3.1:

Man erweitert daher die Zahlen zunächst um die ***imaginäre Einheit*** **j** mit der Eigenschaft

$$\mathrm{j}^2 = -1. \tag{3.1}$$

Bemerkung

Wir bezeichnen die imaginäre Einheit nicht mit i, sondern mit j, da in der Elektrotechnik der elektrische Strom mit i bezeichnet wird.

Definition 3.2:

- Die Menge $\{\mathrm{j}b \text{ mit } b \in \mathbb{R}\}$ heißt Menge der ***imaginären Zahlen***.
- Die Menge $\mathbb{C} := \{\, a + \mathrm{j}b$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}\}$ heißt Menge der ***komplexen Zahlen***.
- Sei $z = a + \mathrm{j}b \in \mathbb{C},$ dann heißt $a = Re(z)$ ***Realteil*** und
  $b = Im(z)$ ***Imaginärteil*** von z (ohne j !).

Definition 3.2:

- Die Menge $\{\mathrm{j}b$ mit $b \in \mathbb{R}\}$ heißt Menge der ***imaginären Zahlen***.
- Die Menge $\mathbb{C} := \{ a + \mathrm{j}b$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}\}$ heißt Menge der ***komplexen Zahlen***.
- Sei $z = a + \mathrm{j}b \in \mathbb{C}$, dann heißt $a = Re(z)$ ***Realteil*** und
  $b = Im(z)$ ***Imaginärteil*** von z (ohne j !).

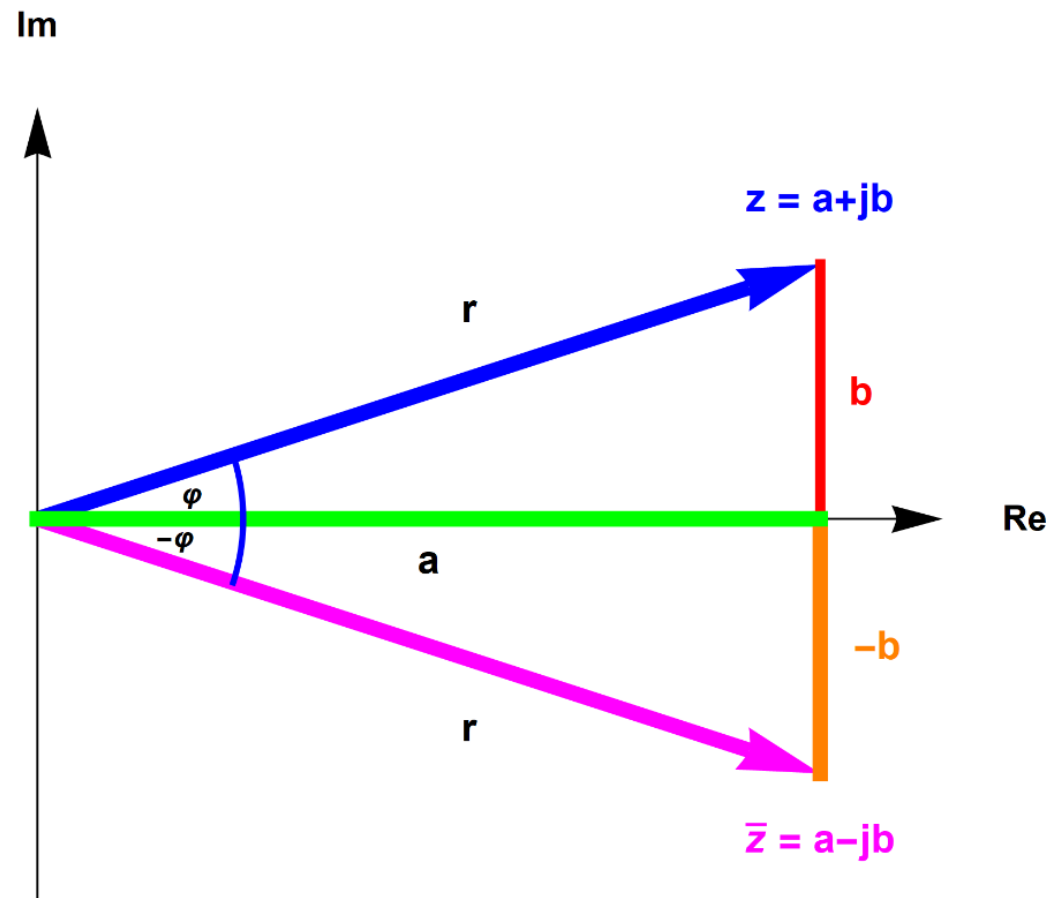
Wenn $a \in \mathbb{R}$, dann ist $a + \mathrm{j}0 \in \mathbb{C}$. In diesem (Mengen-) Sinne gilt:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Da die Rechenoperationen $+, -, \cdot, :$ in $\mathbb{R}$ sich auch in $\mathbb{C}$ fortsetzen lassen, ist $\mathbb{C}$ eine ***Erweiterung*** von $\mathbb{R}$ (man spricht auch von ***Körpererweiterung***)

3.2 Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene

Sei $z \epsilon \mathbb{C}$. Man kann dann z grafisch in einer Ebene darstellen, indem man den Realteil waagerecht und den Imaginärteil senkrecht dazu aufträgt. Diese Ebene wird ***Gaußsche Zahlenebene*** oder ***komplexe Ebene*** $\mathbb{C}$ genannt.



Dann heißt

$z = a + \mathrm{j}b$ die ***kartesische Form von z*** und

$\bar{z} := a - \mathrm{j}b$ die ***konjugiert komplexe Zahl von z***

Dann heißt

$z = a + \mathrm{j}b$ die ***kartesische Form von z*** und

$\bar{z} := a - \mathrm{j}b$ die ***konjugiert komplexe Zahl von z***

Wenn man den Realteil und den Imaginärteil von *z* in Polarkoordinaten (Kap. 2.3) beschreibt, erhält man die ***trigonometrische*** oder ***Polarkoordinatenform von z***:

$$z = r\cos\varphi + \mathrm{j}\, r\sin\varphi,$$

wobei gilt:

$$r = |z| = \sqrt{z\,\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Mit der Eulerschen Formel

$$e^{\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi$$

ergibt sich aus der trigonometrischen Form die ***Exponentialform von z***:

$$z = r\, e^{\mathrm{j}\varphi}$$

Mit der Eulerschen Formel

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

ergibt sich aus der trigonometrischen Form die ***Exponentialform von z***:

$$z = r\,e^{j\varphi}$$

kartesisch	polar	exponentiell
a + jb	r cos (φ) + j r sin (φ)	r $e^{j\varphi}$
$\begin{cases} a = r\ \cos\varphi \\ b = r\ \sin\varphi \end{cases}$	$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$	z = r $e^{j\varphi}$

3.3 Rechnen mit komplexen Zahlen

3.3.1 Addition und Subtraktion

Sei $z_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1$ und $z_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2$, dann ist

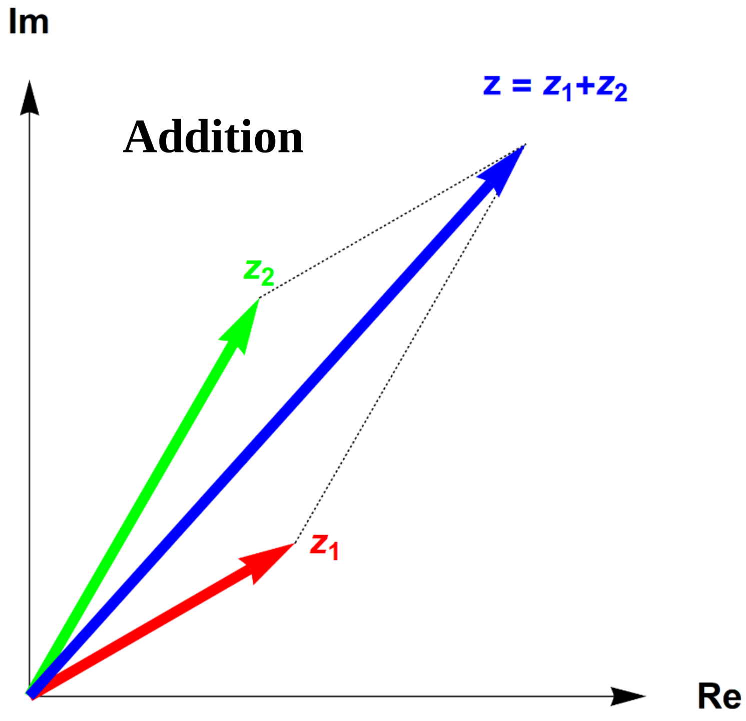
$$z = z_1 \pm z_2 = a_1 \pm a_2 + \mathrm{j}(b_1 \pm b_2).$$

3.3 Rechnen mit komplexen Zahlen

3.3.1 Addition und Subtraktion

Sei $z_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1$ und $z_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2$, dann ist

$$z = z_1 \pm z_2 = a_1 \pm a_2 + \mathrm{j}(b_1 \pm b_2).$$

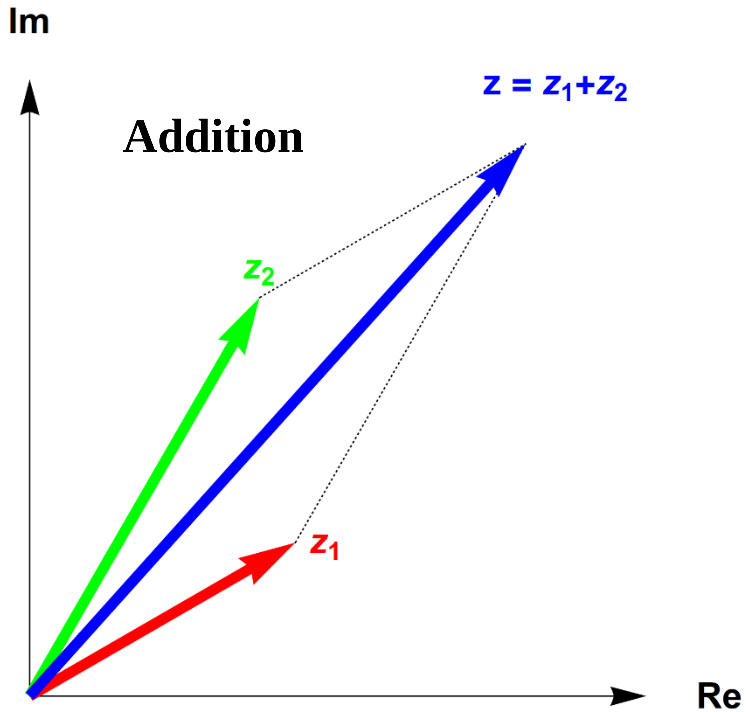


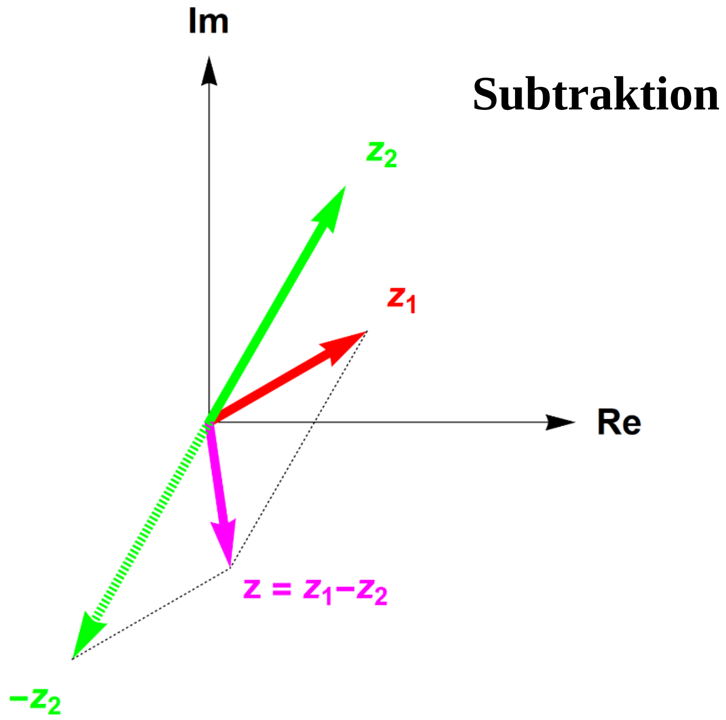
3.3 Rechnen mit komplexen Zahlen

3.3.1 Addition und Subtraktion

Sei $z_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1$ und $z_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2$, dann ist

$$z = z_1 \pm z_2 = a_1 \pm a_2 + \mathrm{j}(b_1 \pm b_2).$$





Beispiel 3.2:

$$(1{,}5 + j) + (1 + 2j) = (1{,}5 + 1) + j\,(1 + 2) = 2{,}5 + 3j$$

$$(1{,}5 + j) - (1 + 2j) = (1{,}5 - 1) + j\,(1 - 2) = 0{,}5 - j$$

3.3.2a) Multiplikation und Division (in Exponentialform)

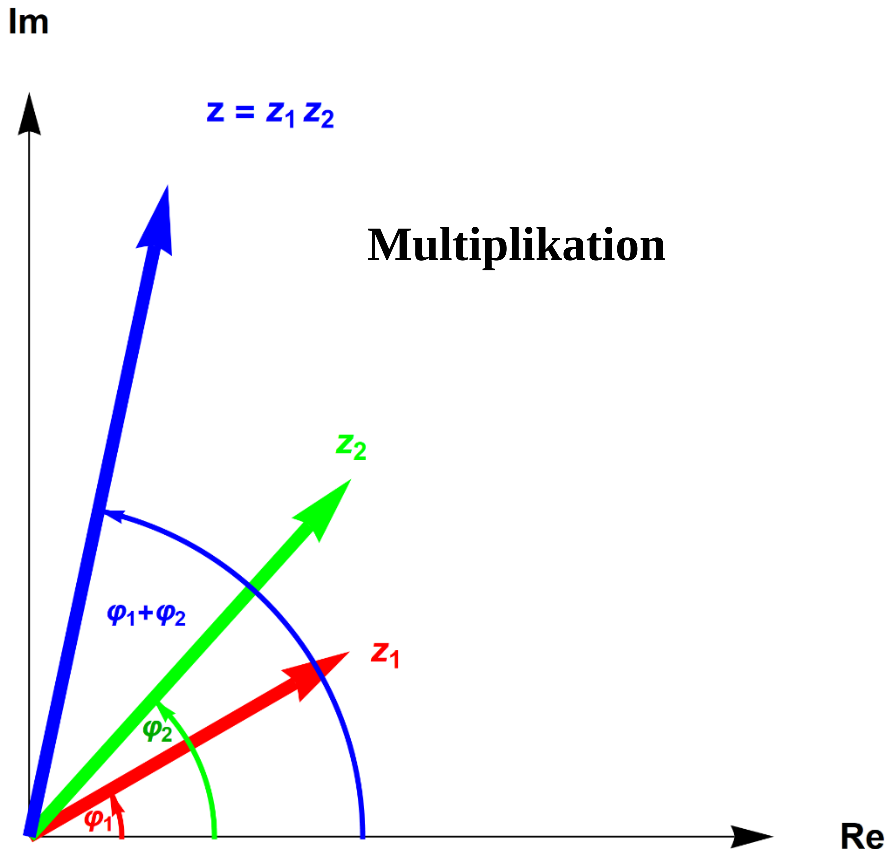
Sei $z_1 = r_1\, e^{\mathrm{j}\varphi_1}$ und $z_2 = r_2\, e^{\mathrm{j}\varphi_2}$, dann ist

$z = z_1 z_2 = r_1 r_2\, e^{\mathrm{j}(\varphi_1+\varphi_2)}$ bzw. $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\, e^{\mathrm{j}(\varphi_1-\varphi_2)}$.

3.3.2a) Multiplikation und Division (in Exponentialform)

Sei $z_1 = r_1\, e^{j\varphi_1}$ und $z_2 = r_2\, e^{j\varphi_2}$, dann ist

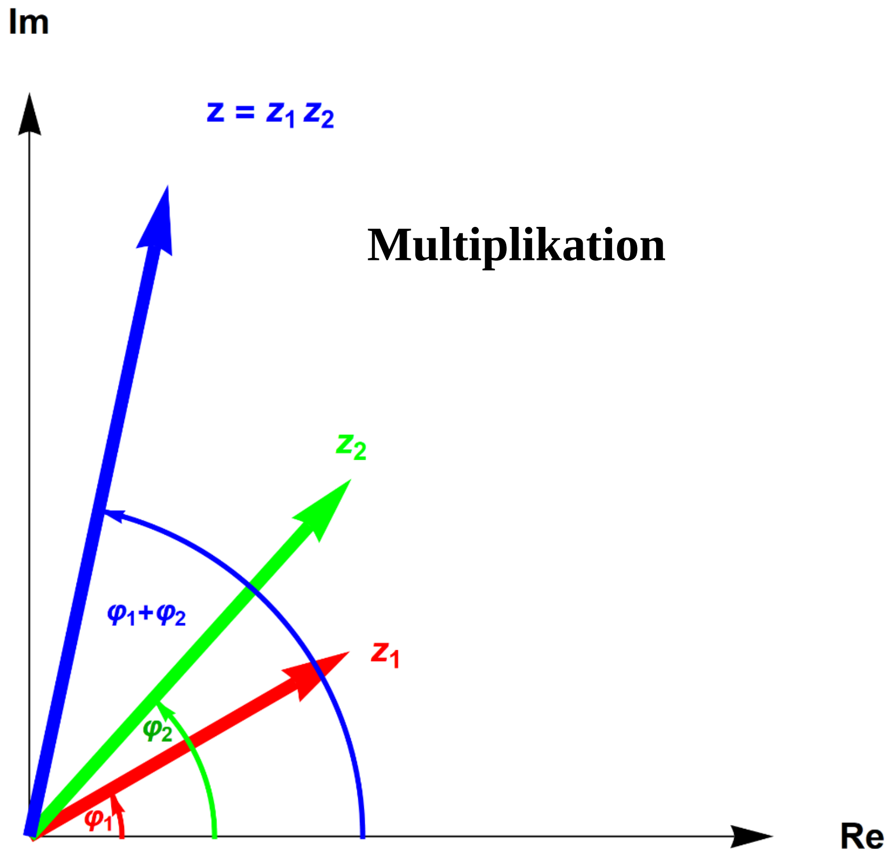
$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2\, e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} \quad \text{bzw.} \quad z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

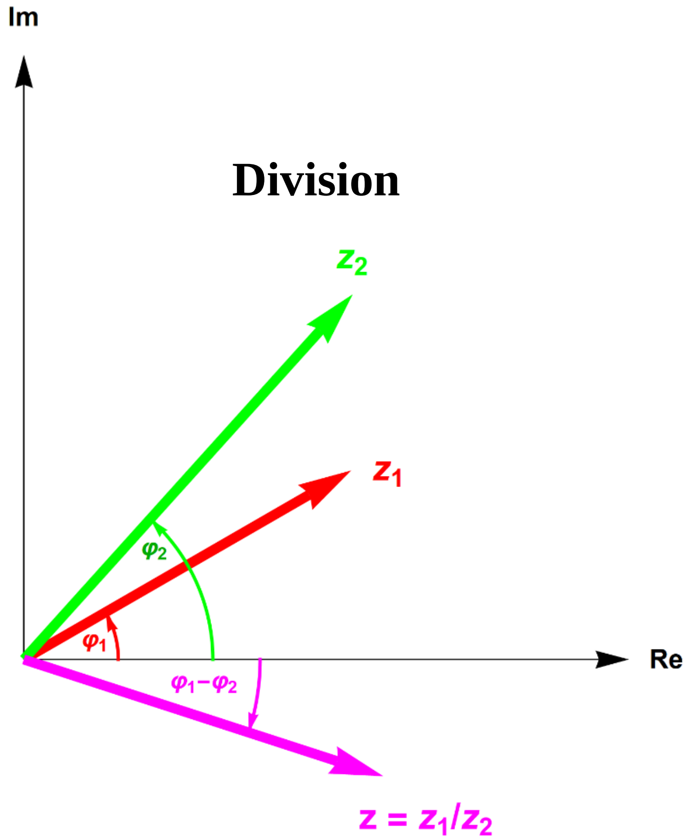


3.3.2 Multiplikation und Division

Sei $z_1 = r_1\, e^{\mathrm{j}\varphi_1}$ und $z_2 = r_2\, e^{\mathrm{j}\varphi_2}$, dann ist

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2\, e^{\mathrm{j}(\varphi_1+\varphi_2)} \quad \text{bzw.} \quad z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{\mathrm{j}(\varphi_1-\varphi_2)}.$$





Beispiel 3.4:

Gegeben seien $z_1 = 2\, e^{0{,}52\mathrm{j}}$ und $z_2 = 1{,}3\, e^{0{,}83\mathrm{j}}$. Dann ist:

$$z = z_1 \; z_2 = 2 \; \cdot 1{,}3\, e^{(0{,}52+0{,}83)\mathrm{j}} = 2{,}6\, e^{1{,}35\mathrm{j}}$$

bzw.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{1{,}3}\; e^{\mathrm{j}(0{,}52-0{,}83)\mathrm{j}} = 0{,}769\, e^{-0{,}31\mathrm{j}}$$

3.3.2b) Multiplikation und Division (in kartesischer Form)

Dies ist etwas aufwendiger als in exponentieller Form!

Multiplikation :

Sei $z_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1$ und $z_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2$, dann ist

$$z = z_1 \cdot z_2 \ = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + \mathrm{j}b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + \mathrm{j}(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Beispiel:

$$(2 + j3) \cdot (1 + \mathrm{j}4) = (2 - 12) + \mathrm{j}(8 + 3) = -10 + \mathrm{j}11$$

Division:

Sei $z_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1$ und $z_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2$, dann ist

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + jb_1)}{(a_2 + \mathrm{j}b_2)} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \ \cdot \overline{z_2}} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - \mathrm{j}b_2)}{|z_2|^2} =$$

$$\frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + \mathrm{j}(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{{a_2}^2 + {b_2}^2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{{a_2}^2 + {b_2}^2} + j\,\frac{(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{{a_2}^2 + {b_2}^2}$$

Beispiel:

$$\frac{(2 + j3)}{(1 + \mathrm{j}4)} = \frac{(2 + 12) + \mathrm{j}(3 - 8)}{1^2 + 4^2} = \frac{14 - \mathrm{j}5}{1 + 16} = \frac{14}{17} - j\,\frac{5}{17}$$

3.3.3 Potenzieren

Sei $z = r\, e^{\mathrm{j}\varphi}$, dann ist für $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = r^n\, e^{\mathrm{j}n\varphi}.$$

Mit Hilfe der Eulerschen Formel $e^{\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi$ ergibt sich dann

die ***Formel von Moivre***:

$$z^n = r^n \cos(n\varphi) + \mathrm{j}\, r^n \sin(n\varphi), n \in \mathbb{N}$$

Beispiel 3.5:

Gegeben sei $z = 3\ e^{0,5\mathrm{j}}$, gesucht ist z^3. Dann ergibt sich mit

$$z = 3(cos(0,5) + \mathrm{j}\ sin(0,5))$$

und der Formel von Moivre:

$$z^3 = 27\ e^{1,5\mathrm{j}} = 27(\cos(1,5) + \mathrm{j} \sin(1,5))$$

$$= 27 \cdot 0,0707 + \mathrm{j}\ 27 \cdot 0,997$$

$$= 1,90 + \mathrm{j}\ 26,93$$

3.3.4 Wurzelziehen

Die Wurzelfunktion ist zunächst nur für positive reelle Zahlen definiert.

Wir erweitern nun die Wurzelfunktion auf komplexe (damit auch auf negative) Zahlen , indem wir die Exponentialform

$$z = r\, e^{\mathrm{j}\varphi}$$

benutzen. Dabei entstehen wegen der Periodizität der e Funktion

$$z = r\, e^{\mathrm{j}\varphi} \quad = r\, e^{\mathrm{j}(\varphi + k\, 2\pi)} \text{ für alle } k \epsilon \mathbb{Z}$$

(wegen $r \cos\varphi + \mathrm{j}\, \mathrm{rsin}\, \varphi = r \cos(\varphi + k\, 2\pi) + \mathrm{j}\, \mathrm{rsin}(\varphi + k\, 2\pi)$!)

mehrdeutige Lösungen .

Wenn wir diese Erweiterung betonen wollen, sprechen wir von

komplexen Wurzeln.

Begründung: Sei

$$z = r\, e^{\mathrm{j}\varphi},$$

dann gilt auch

$$z = r\, e^{\mathrm{j}(\varphi + k\, 2\pi)} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}$$

wegen der Periodizität der e Funktion. Wir nehmen an, es gibt eine Wurzel

$$a = a_0 e^{\mathrm{j}\alpha} \text{ von } z \text{ mit}$$

(gesucht sind a_0 und α !)

$$z = a^n = (a_0)^n e^{\mathrm{j}n\alpha},$$

dann gilt

$$z = r\, e^{\mathrm{j}(\varphi + k\, 2\pi)} = (a_0)^n e^{\mathrm{j}n\alpha}$$

und somit

(1) $r = (a_0)^n$ (Gleichheit der Beträge)

und

(2) $(\varphi + k\, 2\pi) = n\alpha$ (Gleichheit der Phasenwinkel).

Aus (1) folgt

$$a_0 = \sqrt[n]{r}$$

und aus (2) folgt

$$\alpha = \frac{(\varphi + k\, 2\pi)}{n} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Zusammengefasst ergeben sich die Wurzeln:

$$w_k := a = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{\mathrm{j}\frac{\varphi + k\,2\pi}{n}} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Das sind unendlich viele! Wegen der Periodizität gilt jedoch für die Wurzel

$$w_{k+n} = \sqrt[n]{r}\, e^{\mathrm{j}\left(\frac{\varphi + (k+n)2\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r}\, e^{\mathrm{j}\left(\frac{\varphi + k\,2\pi}{n} + \frac{n\,2\pi}{n}\right)} = w_k$$

$$f\text{ür}\;\; k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

und somit sind nur n Wurzeln verschieden!

Zusammengefasst ergeben sich die Wurzeln:

$$w_k \coloneqq a = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{\mathrm{j}\frac{\varphi + k\,2\pi}{n}} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Das sind unendlich viele! Wegen der Periodizität gilt jedoch für die Wurzel

$$w_{k+n} = \sqrt[n]{r}\, e^{\mathrm{j}\left(\frac{\varphi + (k+n)2\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r}\, e^{\mathrm{j}\left(\frac{\varphi + k\,2\pi}{n} + \frac{\cancel{n}\,2\pi}{\cancel{n}}\right)} = w_k$$

$$f\text{ür}\;\; k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

und somit sind nur n Wurzeln verschieden!

Zusammengefasst ergeben sich die Wurzeln:

$$w_k \coloneqq a = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{\mathrm{j}\frac{\varphi + k\,2\pi}{n}} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Das sind unendlich viele! Wegen der Periodizität gilt jedoch für die Wurzel

$$w_{k+n} = \sqrt[n]{r}\, e^{\mathrm{j}\left(\frac{\varphi + (k+n)2\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r}\, e^{\mathrm{j}\left(\frac{\varphi + k\,2\pi}{n} + 2\pi\right)} = w_k$$

$$f\text{ür}\;\; k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

und somit sind nur n Wurzeln verschieden!

Zusammengefasst ergeben sich die Wurzeln:

$$w_k \coloneqq a = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{\mathrm{j}\frac{\varphi + k\,2\pi}{n}} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Das sind unendlich viele! Wegen der Periodizität gilt jedoch für die Wurzel

$$w_{k+n} = \sqrt[n]{r}\, e^{\mathrm{j}\left(\frac{\varphi + (k+n)2\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r}\, e^{\mathrm{j}\left(\frac{\varphi + k\,2\pi}{n}\right)} = w_k$$

$$f\text{ür}\ \ k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

und somit sind nur n Wurzeln verschieden!

Beispiel 3.6:

Seien $z = -1$ und n = 2; gesucht ist $w_k := \sqrt[2]{-1}$.

Mit $z = -1 = e^{\mathrm{j}\pi}$ gilt:

$$w_k := \sqrt[2]{-1} = \sqrt[2]{1}\, e^{\mathrm{j}\frac{\pi + k\,2\pi}{2}} = e^{\mathrm{j}\frac{\pi + k\,2\pi}{2}} \quad für \;\; k \in \{0, 1\}$$

Also gibt es zwei Wurzeln (das sind die Lösungen von $x^2 = -1$) (s. Abb. 3.7):

$$w_0 = e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{j} \qquad \text{und} \qquad w_1 = e^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)} = -\mathrm{j}$$

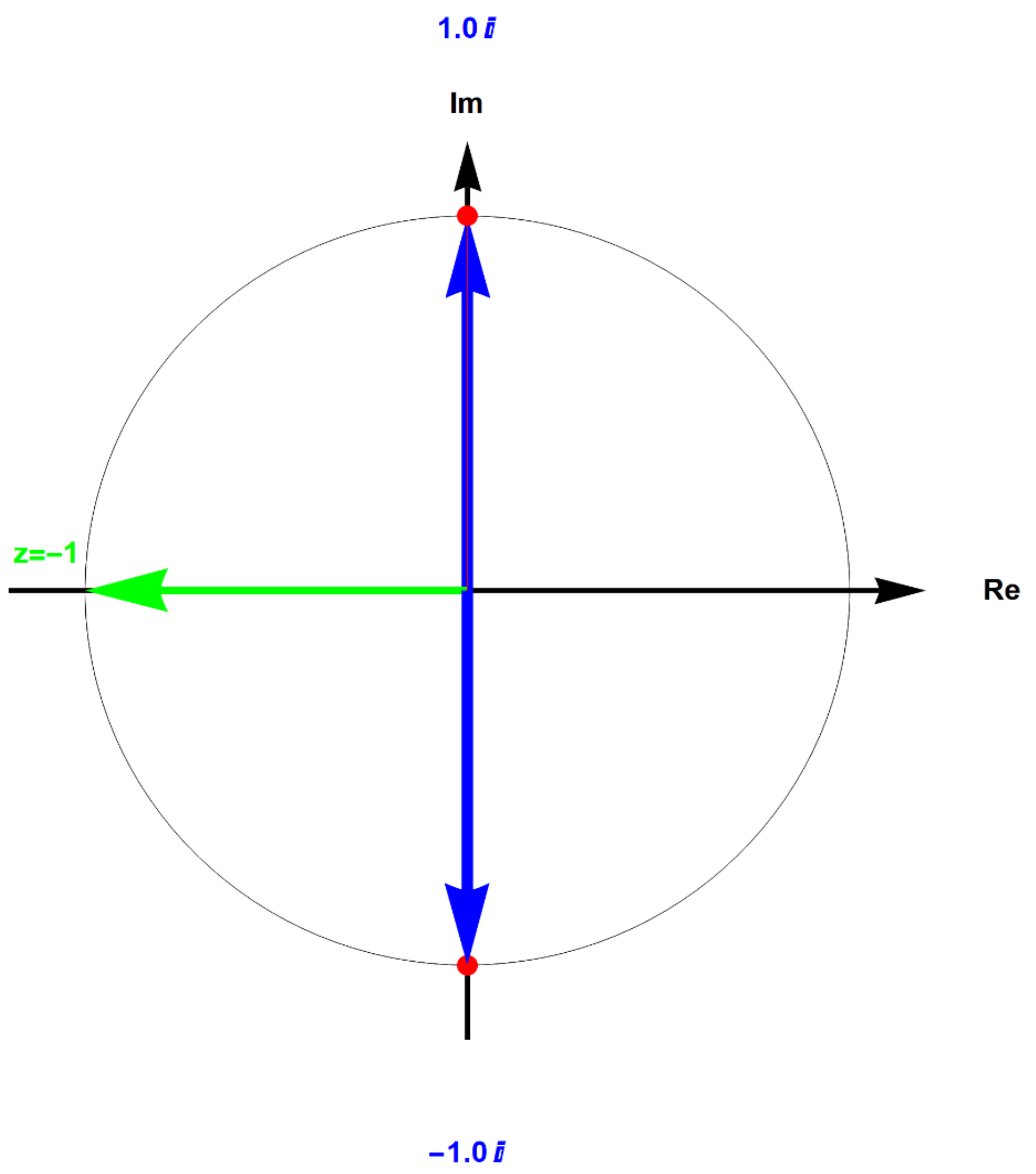


Abb.3.7: Grafische Darstellung von $w_k := \sqrt[2]{-1} = \pm\mathrm{j}$

Beispiel 3.7:

Seien $z = -1$ und n = 5; gesucht ist $w_k := \sqrt[5]{-1}$.

Mit $z = -1 = e^{\mathrm{j}\pi}$ gilt:

$$w_k := \sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{1}\, e^{\mathrm{j}\frac{\pi + k\,2\pi}{5}} = e^{\mathrm{j}\frac{\pi + k\,2\pi}{5}} \quad f\text{ür} \;\; k \in \{0, 1,2,3,4\}$$

Also gibt es 5 Wurzeln (s. Abb. 3.8):

$$w_0 = e^{j\frac{\pi+0\cdot 2\pi}{5}} = e^{j\frac{\pi}{5}} = 0{,}81 + 0{,}59j$$

$$w_1 = e^{j\frac{\pi+2\pi}{5}} = e^{j\frac{3\pi}{5}} = -0{,}31 + 0{,}95j$$

$$w_2 = e^{j\frac{\pi+4\pi}{5}} = e^{j\frac{5\pi}{5}} = -1$$

$$w_3 = e^{j\frac{\pi+6\pi}{5}} = e^{j\frac{7\pi}{5}} = -0{,}31 - 0{,}95j$$

$$w_4 = e^{j\frac{\pi+8\pi}{5}} = e^{j\frac{9\pi}{5}} = 0{,}81 - j0{,}59$$

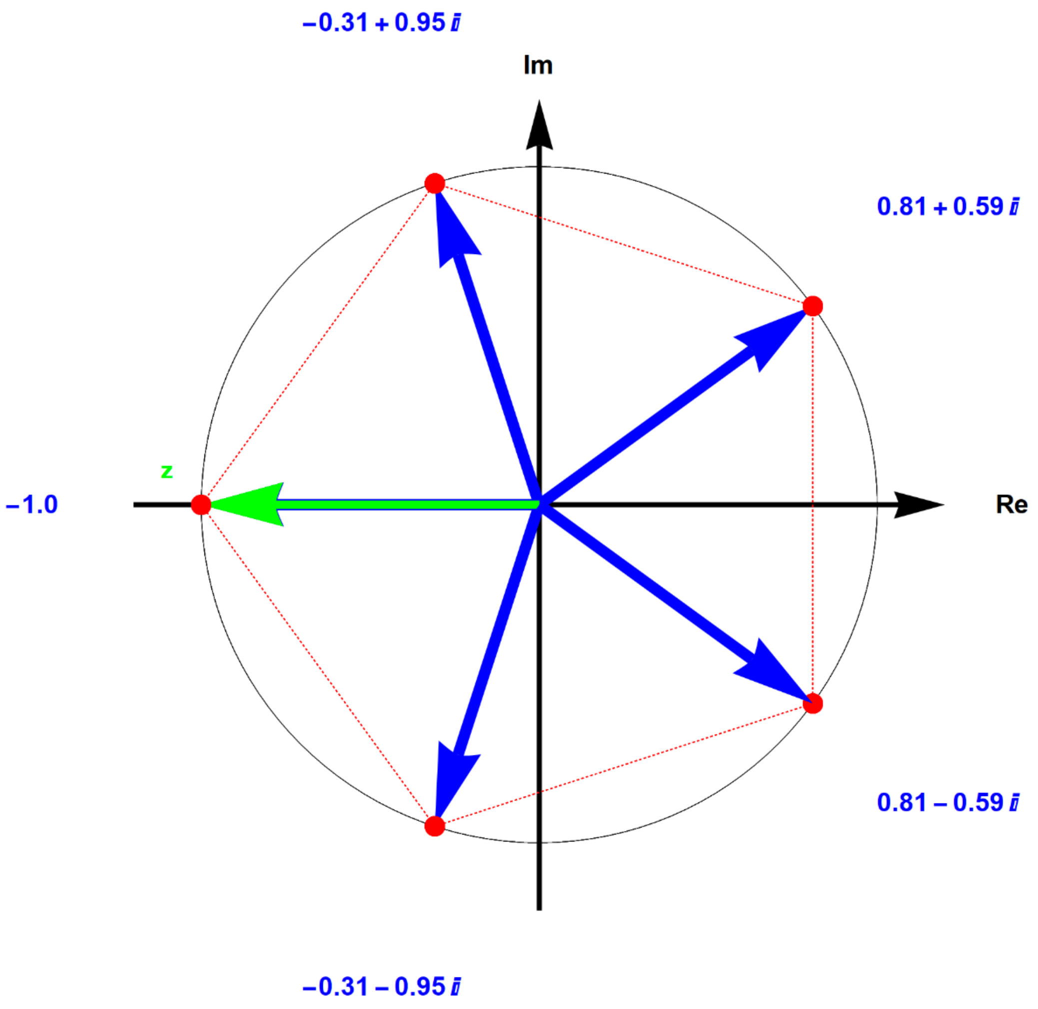


Abb.3.8: Grafische Darstellung von $w_k := \sqrt[5]{-1} = \pm j$

Beispiel 3.8: Grafische Darstellung von komplexen Wurzeln aus (-1+j) (s. Abb. 3.9):

$$w_k \coloneqq \sqrt[n]{-1+\mathrm{j}} \text{ für } n = 2, 3, 4 \text{ und } 5$$

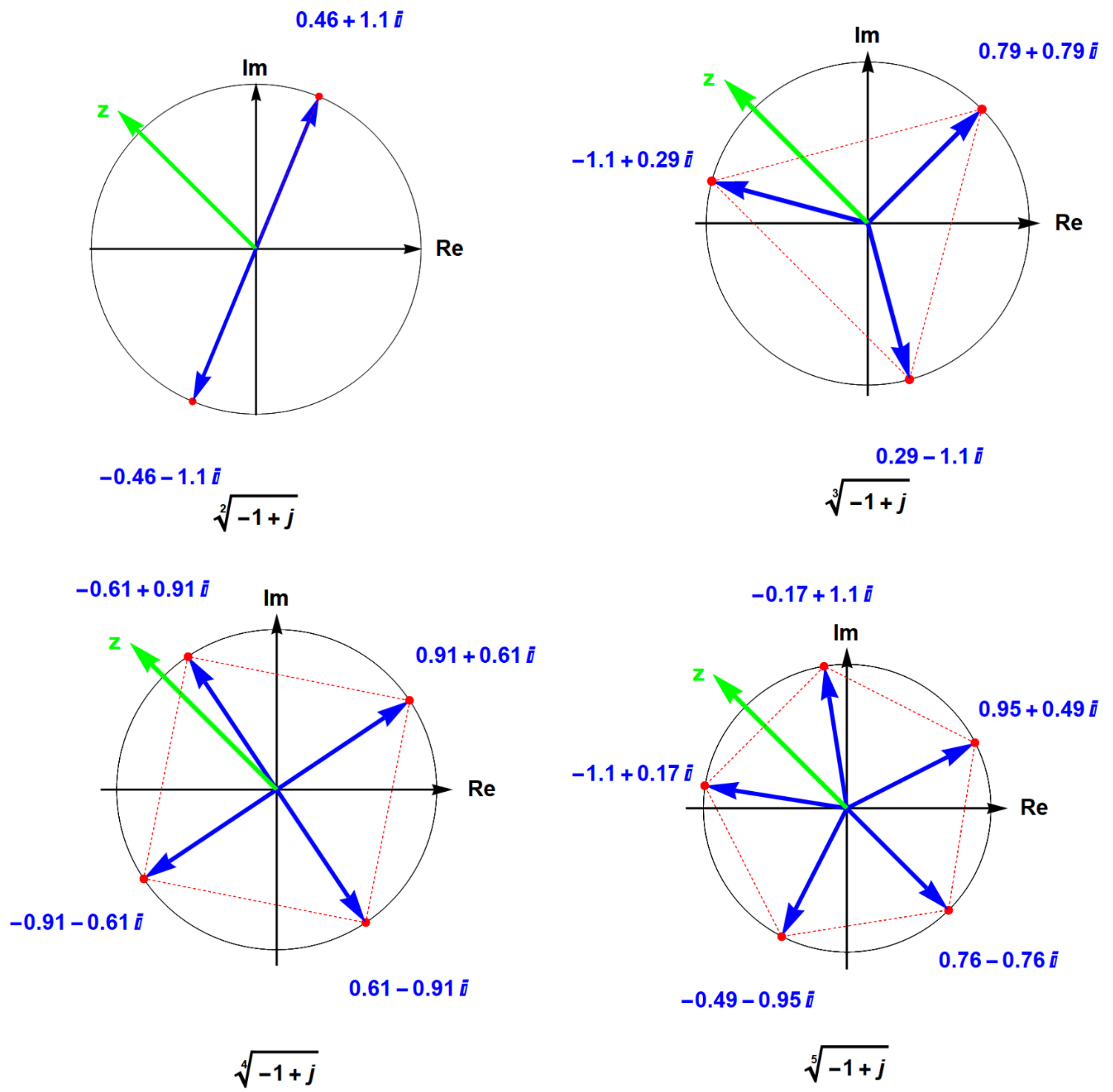


Abb.3.9: Grafische Darstellung von $w_k := \sqrt[n]{-1+j}$

Grafische Darstellung von Wurzeln aus -1+j. CDF-Animation LINK zu Abb. 3.8 und 3.9. Nur mit CDF-Player abspielbar.

http://sn.pub/GatsAz

3.3.5 Logarithmieren

Die Logarithmusfunktion ist wie die Wurzelfunktion zunächst nur für positive reelle Zahlen definiert. Wenn man auch die Logarithmusfunktion auf komplexe Zahlen erweitern will, dann benutzt man die Exponentialdarstellung $z = r\, e^{\mathrm{j}\varphi}$.

Da diese periodisch, d.h. unendlich-vieldeutig ist, erhält man auch hier mehrdeutige Lösungen. Allerdings sind das unendlich-vieldeutige Lösungen.

Sei $z = r\, e^{\mathrm{j}\varphi} = r\, e^{\mathrm{j}(\varphi + k\, 2\pi)}$ für $k \in \mathbb{Z}$,

dann ist:

$$\ln z = \ln\left(r\, e^{\mathrm{j}(\varphi + k\, 2\pi)}\right) = \ln r + \mathrm{j}(\varphi + k\, 2\pi) \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

log z = $\ln r + \mathrm{j}\, \varphi$ heißt **Hauptwert** von $\ln z$ $(k = 0)$.

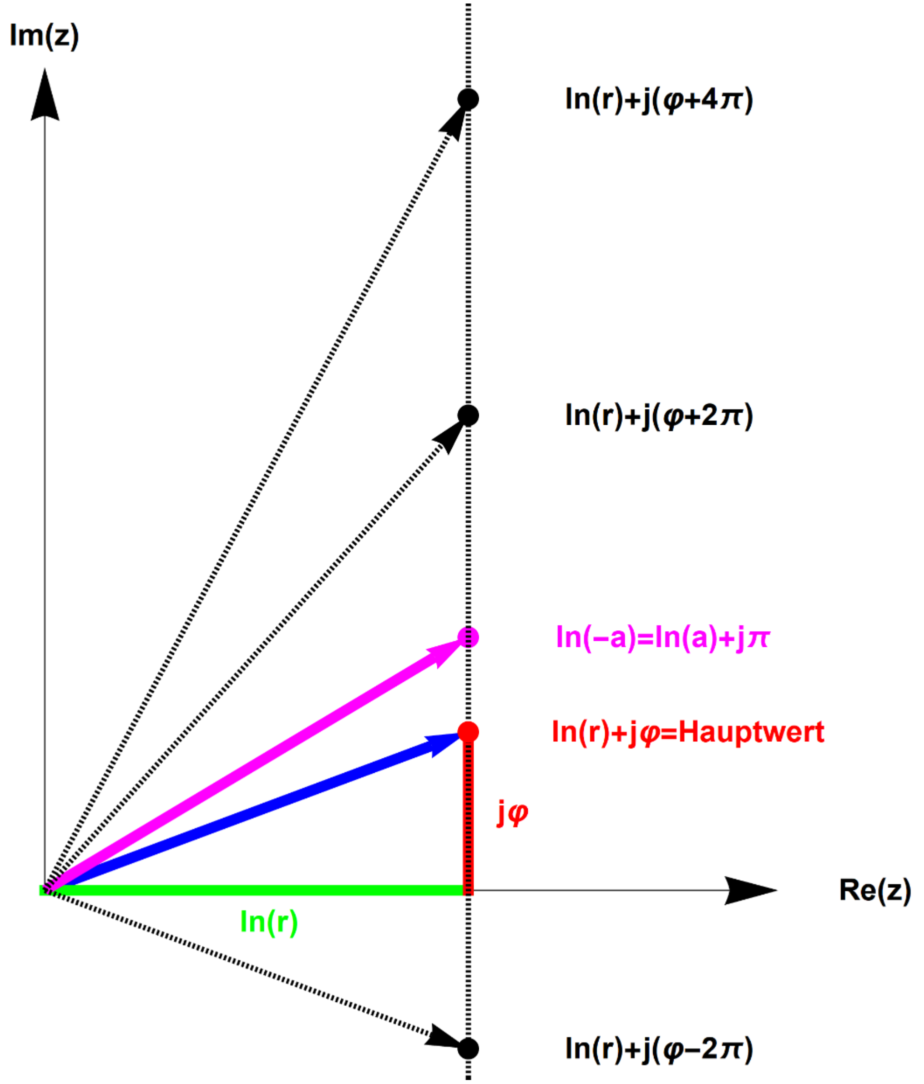


Abb. 3.10 Grafische Darstellung von log *z* und log(-a)

Beispiel 3.9:

Sei $a > 0$ und $z = -a = a^{\mathrm{j}\pi}$. Daraus folgt $\mathrm{Log}(-a) = \ln(a) + \mathrm{j}\,\pi$ (s. Abb. 3.10).

Somit ist der Logarithmus von **negativen** (reellen) Zahlen als komplexe Zahl definiert!

.

Beispiel 3.9:

Sei $a\ > 0$ und $z = -a = a^{\mathrm{j}\pi}$. Daraus folgt $\operatorname{Log}(-a) = \ln(a) + \mathrm{j}\,\pi$

(s. Abb. 3.10).

Somit ist der Logarithmus von **negativen** (reellen) Zahlen als komplexe Zahl definiert!

Beispiel 3.10:

a) Sei $z = -1 = 1e^{j\pi}$.

$$\text{Daraus folgt } \log z = \ln 1 + j\,\pi = j\,\pi\ .$$

b) Sei $z = 3 + \mathrm{j}\,4 = 5e^{\mathrm{j}\,0{,}93}$.

$$\text{Daraus folgt } \log z = \ln 15 + \mathrm{j}\,0{,}93 = 1{,}6 + \mathrm{j}\,0{,}93.$$