Zahlenfolgen

In diesem Kapitel werden Begriffe wie Zahlenfolgen,Konvergenz und Grenzwerte eingeführt. Folgen, die Grenzwerte haben, liefern Aussagen über die „Feinstruktur“ der reellen Zahlen und erweitern die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ zur Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Indem man Grenzwerte von konvergenten Folgen hinzunimmt, werden die reellen Zahlen „vollständig“. Dazu gehören die bekannten Konstruktionen irrationaler Zahlen wie e und π. Grenzwerte von Folgen bilden auch die Grundlage für die Analysis und eröffnen den Zugang zur Differential- und Integralrechnung.

4.1 Zahlenfolgen

Die einfachste und bekannteste Zahlenfolge ist die der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ \ldots, n, \ldots\}$. Sie ist geordnet und hat unendlich viele Elemente. Die Werte übersteigen auch alle Grenzen. Interessantere Folgen sind jedoch solche Folgen, die Grenzwerte haben, z.B. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$. Hier häufen sich die Werte in der Nähe von 0.Wir beginnen zunächst mit den formalen Definitionen.

Definition 4.1:

(1) Eine geordnete Menge von (reellen oder komplexen) Zahlen $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$ heißt **Zahlenfolge** oder **Folge**.

(2) Die Zahlen a_n,$n \in \mathbb{N}$ heißen ***Folgenglieder*** oder Elemente der Folge.

(3) Eine Folge $\{a_n\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$ heißt ***konvergent*** und hat den ***Grenzwert*** g**,** wenn gilt: Für alle (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n > n_0$ gilt

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

Formale Schreibweise von **(3)** mit Quantoren:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \; \bigvee_{n_0 \in N} \; \bigwedge_{n>n_0} \left(|a_n - g| < \varepsilon \right)$$

Andere Schreibweisen:

$\{a_n\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$ ist konvergent mit dem Grenzwert g genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \text{ oder } a_n \to g,\; n \to \infty.$$

Wir fassen zunächst die wesentlichen Eigenschaften und Begriffe von Folgen zusammen und zeigen dann an Beispielen das verschiedene Verhalten von Folgen.

Bemerkung 4.1:

(1) g ist Grenzwert, wenn in einer beliebig kleinen ε-Umgebung $U_\varepsilon(g) \coloneqq (g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ von g ***fast alle*** (d.h. alle bis auf endlich viele) Elemente der Folge liegen.

(2) Eine konvergente Folge hat nur einen Grenzwert.

(3) Wenn eine Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, ist sie konvergent, auch wenn der Grenzwert nicht bekannt ist (zum Beweis s. G. Bärwolff 2006, S. 83).

(4) Wenn eine Folge nicht konvergent ist, heißt sie ***divergent***.

(5) Eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ heißt **Nullfolge**

Beispiel 4.1:

Betrachte die Folge $\{a_n\}_{n\epsilon\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$, dann gilt $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, d.h.

$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$ ist eine ***Nullfolge***, denn für eine (beliebig kleine) ε-Umgebung von 0, $U_\varepsilon(0) := (-\varepsilon, \varepsilon)$, liegen fast alle Elemente der Folge in $U_\varepsilon(0)$.

Das heißt: Wenn $\varepsilon = \frac{1}{100}$ ist, dann liegen alle Elemente $a_n = \frac{1}{n}$ mit $n > n_0 = 100$ in $U_\varepsilon(0)$ und 99 außerhalb.

Wenn $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ ist, dann liegen alle Elemente $a_n = \frac{1}{n}$ mit $n > n_0 =1000$ in $U_\varepsilon(0)$ und 999 außerhalb

(s. Abb. 4.1).

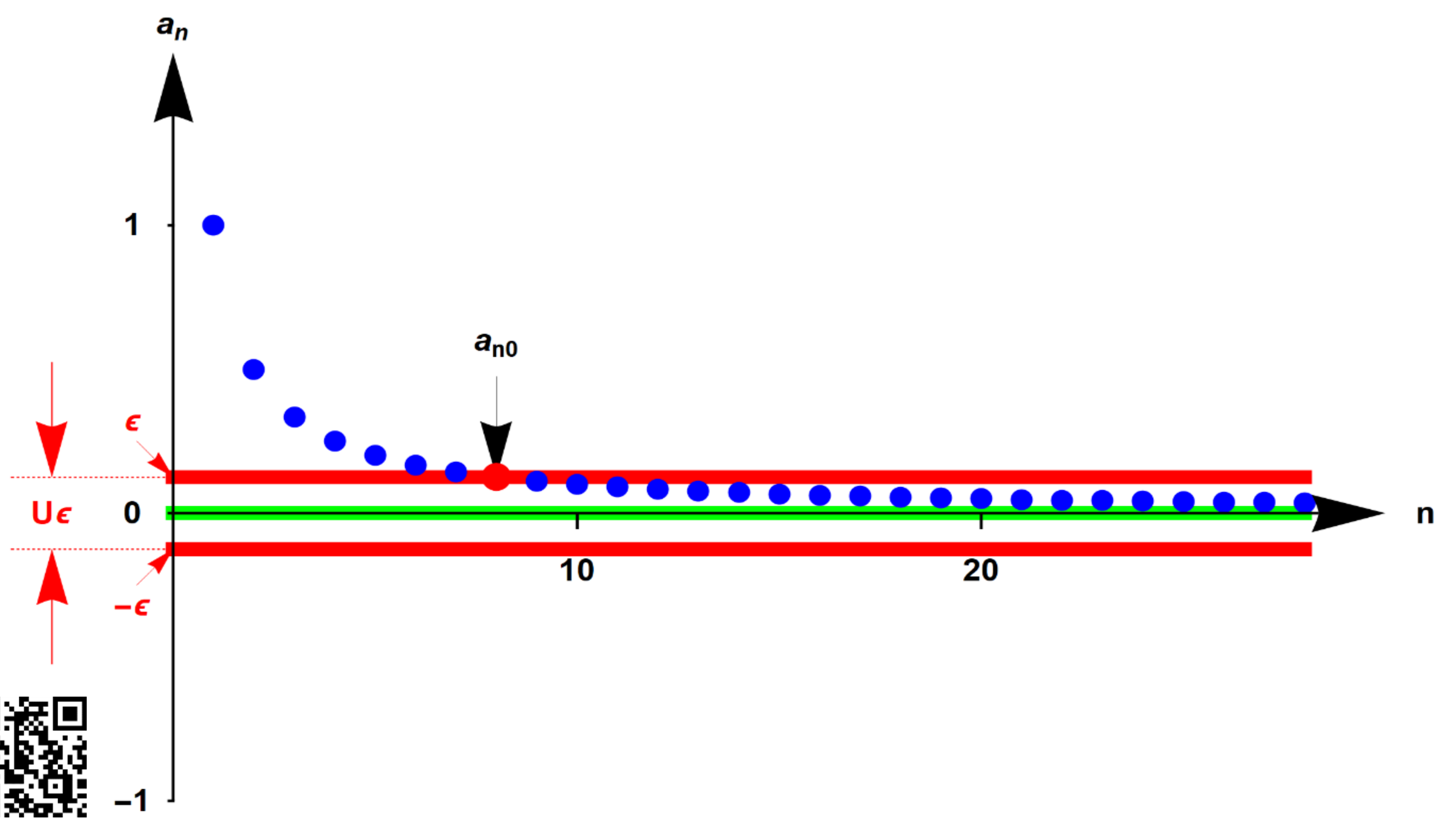

Abb. 4.1. Nullfolge 1/n. Im Video LINK sieht man, wie sich die Folgenelemente von oben dem Grenzwert 0 nähern, dass nur endlich viele Folgenelemente außerhalb von $U_\varepsilon(0)$ liegen und wie die Anzahl n_0 der außerhalb von $U_\varepsilon(0)$ liegenden Folgenelemente endlich bleibt, wenn ε kleiner wird.

https://sn.pub/LWUANE

Beispiel 4.2: e-Folge (s. Abb. 4.2).

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Die Folge ist monoton wachsend, d.h. die Folgenelemente werden immer größer, aber sie ist auch beschränkt nach oben. Man kann zeigen, dass $a_n < 3$ gilt. Damit ist die Folge konvergent. Der Grenzwert ist

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718\ldots$$

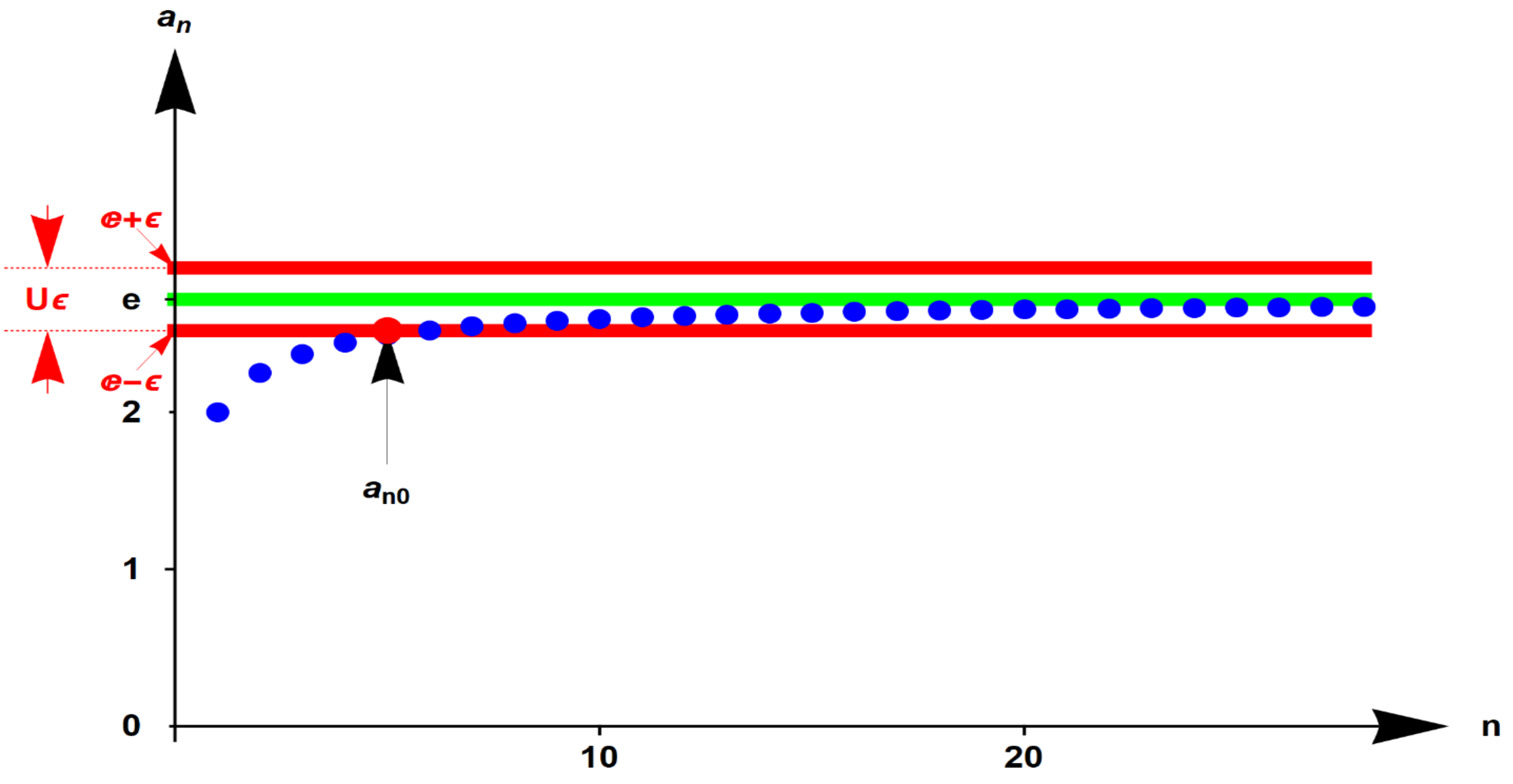

Abb. 4.2. e-Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Im Video LINK sieht man, dass nur endlich viele Folgenelemente außerhalb von $U_\varepsilon(e)$ liegen, wie sie sich dem Grenzwert 0 nähern und wie die Anzahl n_0 der außerhalb von $U_\varepsilon(0)$ liegenden Folgenelemente endlich bleibt, wenn ε kleiner wird.

https://sn.pub/HP3F9d

Beispiel 4.3: die Folge

$$a_n = 1 + (-1)^n \, 1/n \,, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Die Folgenelemente konvergieren von zwei Seiten zum Grenzwert (s. Abb. 4.3)

$$\lim_{n \to \infty} a_n = (1 + (-1)^n \, 1/n) = 1$$

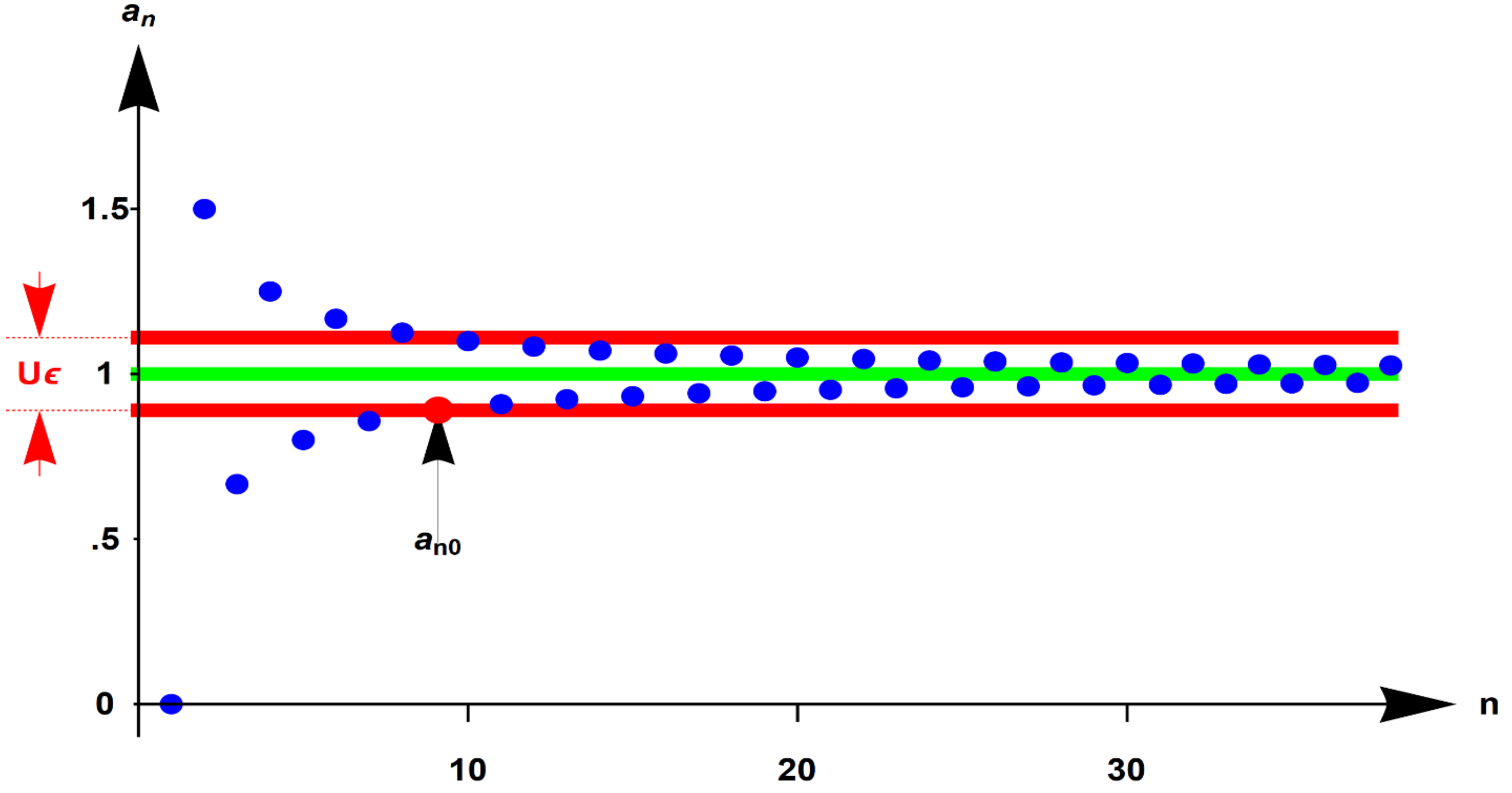

Abb. 4.3. Die Folge $(1 + \frac{(-1)^n 1}{n})$. Im Video LINK sieht man, wie die Folgenelemente sich alternierend von oben und unten dem Grenzwert 1 nähern, dass nur endlich viele Folgenelemente außerhalb von $U_\varepsilon(1)$ liegen und wie die Anzahl n_0 der außerhalb von $U_\varepsilon(0)$ liegenden Folgenelemente endlich bleibt, wenn ε kleiner wird.

https:// sn.pub/h3NdDo

Beispiel 4.4: Folge mit zwei Häufungspunkten.

Die Folge $a_n = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)$ hat die beiden Häufungspunkte $h_1 = 1$ und $h_2 = -1$ und ist damit divergent (s. Abb. 4.4).

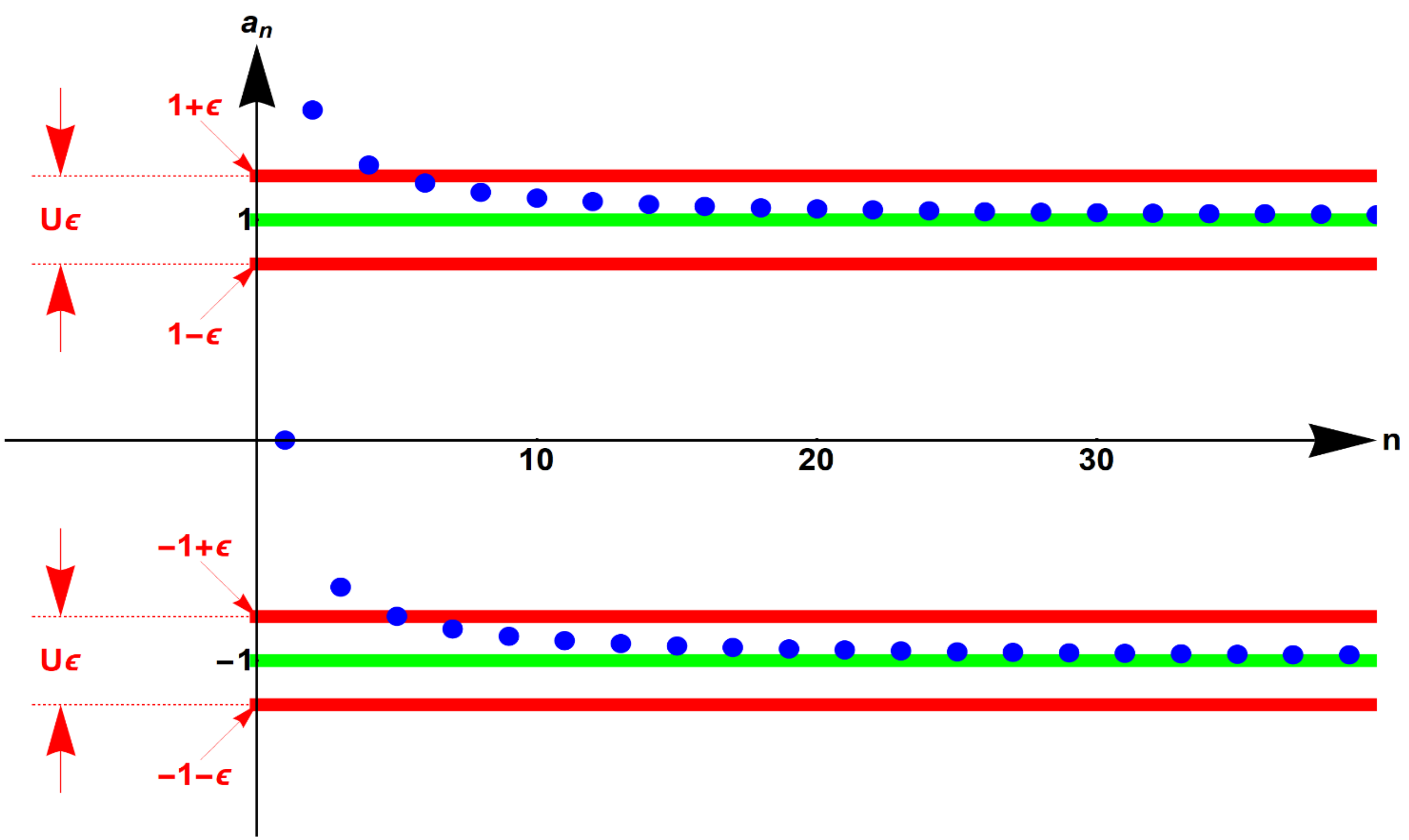

Abb. 4.4. Die Folge $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)$. Im Video LINK sieht man, wie die Folgenelemente sich alternierend dem oberen Häufungspunkt $h_1 = 1$ und dem unteren Häufungspunkt $h_2 = -1$ nähern. Damit gibt es keinen Grenzwert der Folge.

https://sn.pub/jnqguk

Beispiel 4.5: Divergente Folge $a_n = n^3$ (s. Abb. 4.5)

Die Folge $a_n = n^3$ geht gegen ∞, d.h., die Folge wächst über alle Grenzen. Für jede beliebig große Zahl G gibt es ein a_n, sodass gilt $a_n >$ G. Sie hat also keinen Grenzwert und ist damit divergent.

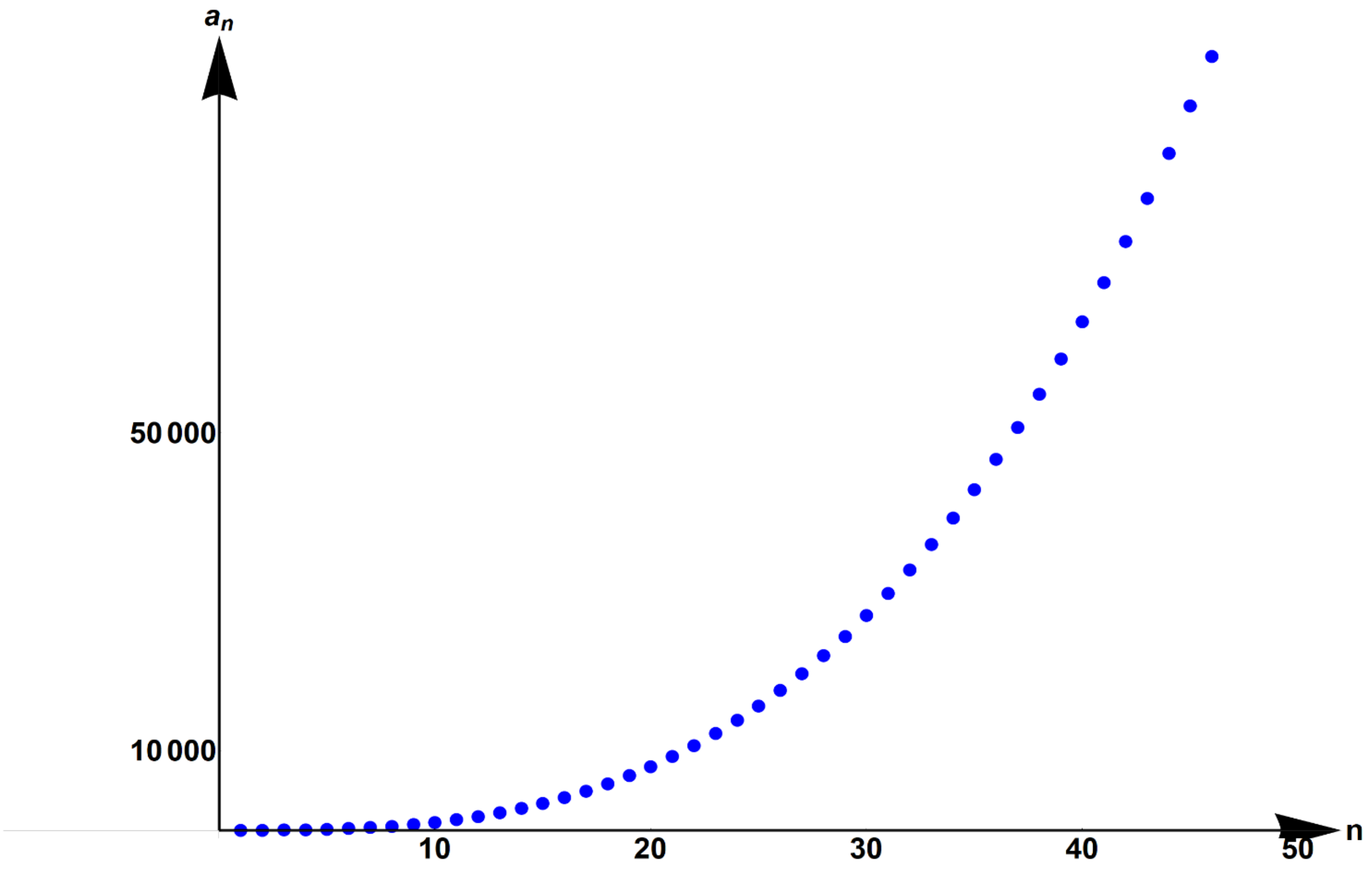

Abb. 4.5. Die Folge n^3

Komplexwertige Folgen

Statt Folgen mit reellen Zahlen kann man auch komplexwertige Folgen betrachten, die gegen einen Grenzwert $g \in \mathbb{C}$ konvergieren. Der Konvergenzbegriff ist dann völlig analog definiert. Hier ist die ε-Umgebung $U_\varepsilon(g)$ von g eine Kreisfläche mit dem Mittelpunkt g und dem Radius ε.

Beispiel 4.6: Für $z_n = \left(\frac{1}{n+j}\right)^n + g$ gilt $\lim_{n\to\infty} z_n = g$.

Das heißt, die komplexe Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ „spiralt“ gegen den Grenzwert g (s. Abb. 4.6).

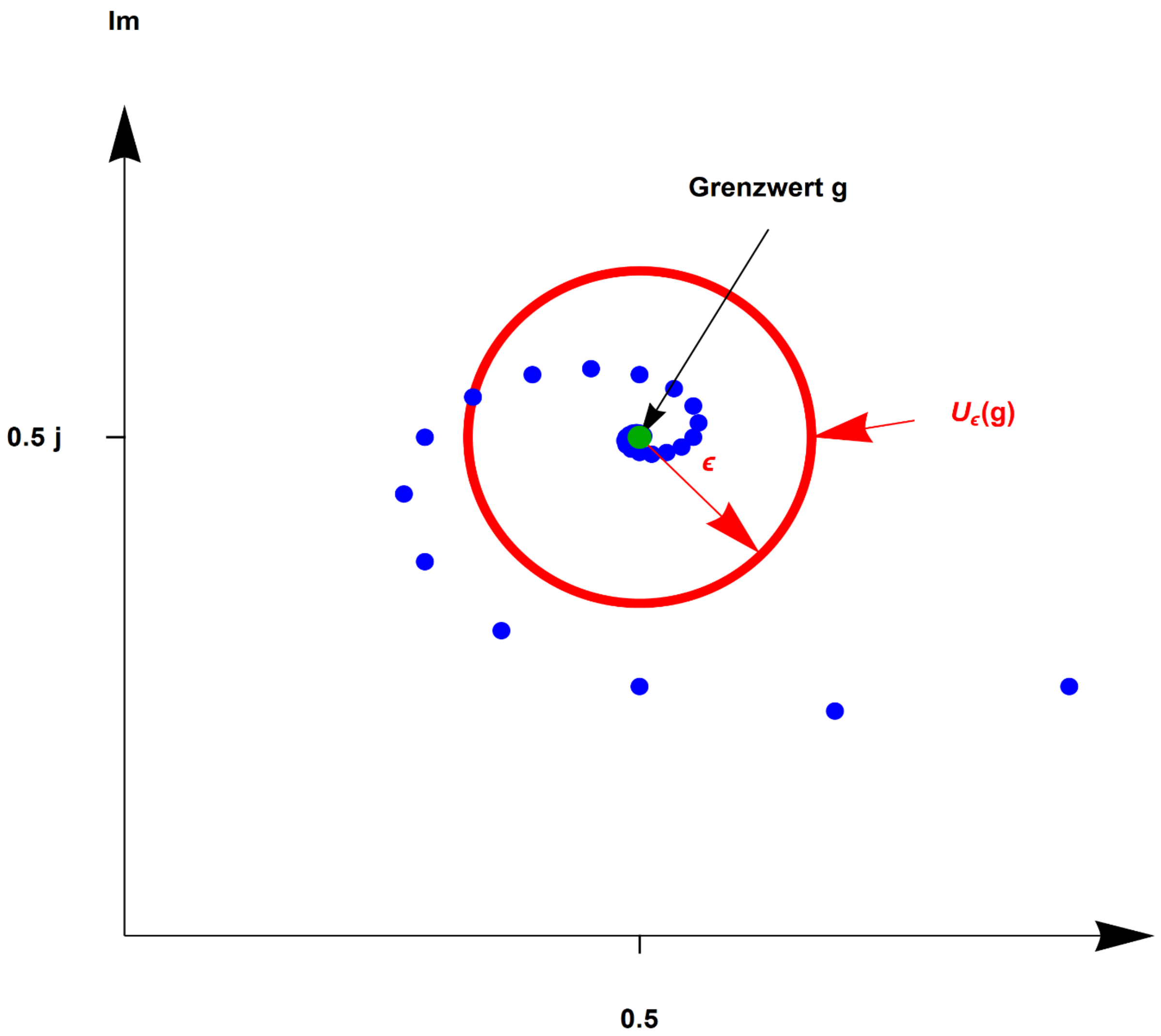

Abb. 4.6. Die Folge $z_n = \left(\frac{1}{1+j}\right)^n + g$. Im Video LINK sieht man, wie die komplexe Folge $\{z_n\}$ mit wachsendem n in die ε-Umgebung $U_\varepsilon(g)$ hineinwandert und zum Grenzwert g konvertiert.

https://sn.pub/7Bx26Y