9 Vektorrechnung

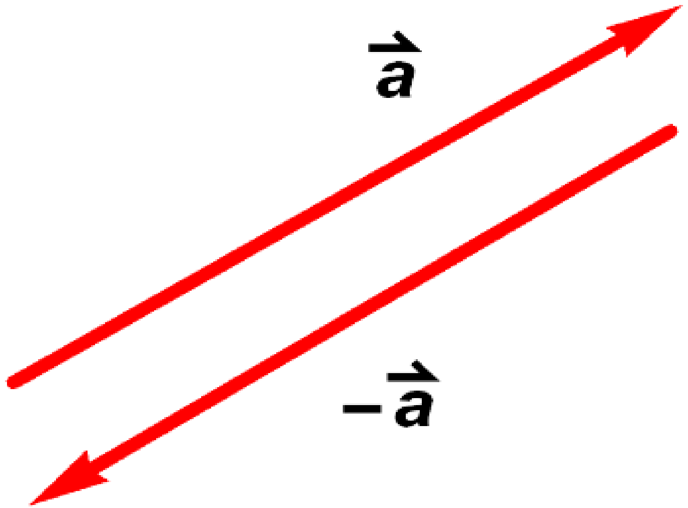
Vektoren sind gerichtete Größen in Physik und Technik, die durch Länge und Richtung beschrieben werden. Sie eignen sich daher in der Mechanik zur Darstellung z.B. von Kraft, Geschwindigkeit oder Drehmomenten. In der Elektrotechnik dienen Vektoren zur Beschreibung von magnetischen und elektrischen Feldern, deren Wirkung sich auch über Kräfte auf Ladungen und elektrische Ströme manifestiert.

Themen sind

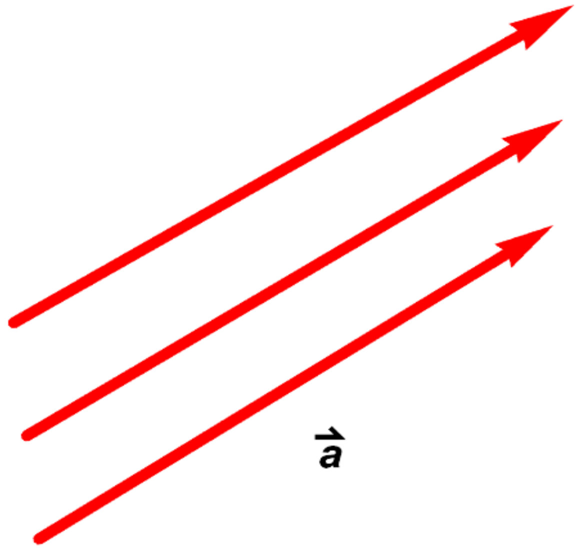
- Rechenoperationen mit Vektoren
- Vektordarstellungen
- Skalarprodukt, Vektorprodukt und Spatprodukt
- Basen, lineare Unabhängigkeit

9.1 Grundbegriffe

- Der ***Nullvektor*** $\vec{0}$ hat die Länge 0. Die Richtung ist unbestimmt.
- ***Einheitsvektoren*** sind Vektoren der Länge 1. Sie geben eine Richtung an. Beispiel: Die Koordinaten-Richtungsvektoren $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ geben die Richtung der Koordinatenachsen an. Andere Einheitsvektoren sind ***normierte Vektoren:*** $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{a}$. Sie geben die Richtung des Vektors $\vec{a}$ an.
- Der ***inverse*** Vektor -$\vec{a}$ von $\vec{a}$ entsteht durch Richtungsumkehr (s.Abb.).

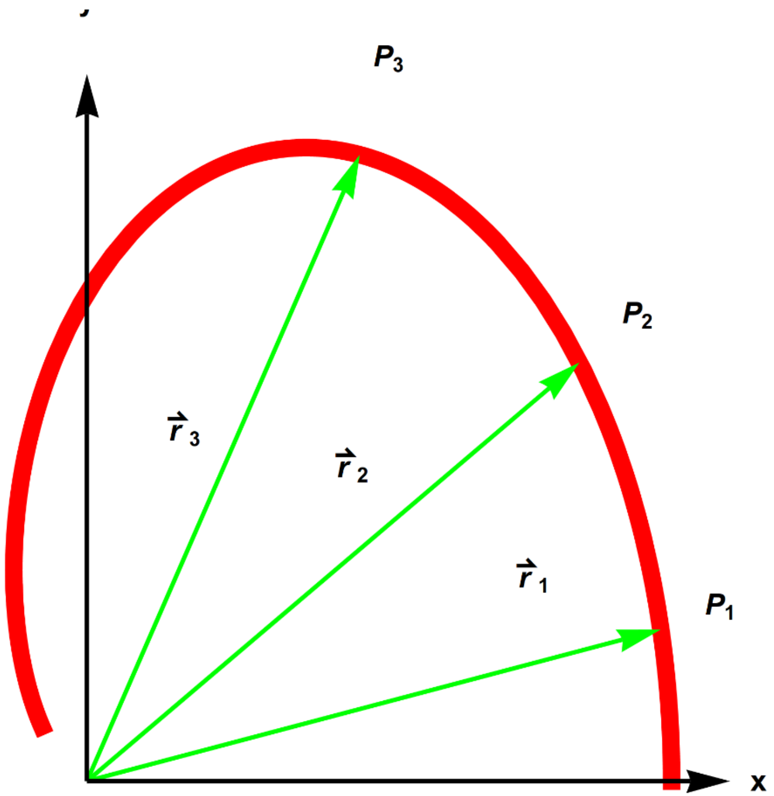


- ***Freie Vektoren*** sind nur festgelegt durch Länge und Richtung. Parallel verschobene „Pfeile“ haben dieselbe Länge und Richtung (s.Abb.). Somit besteht ein Vektor aus einer „Äquivalenzklasse“ von parallelen Pfeilen.



Freier Vektor

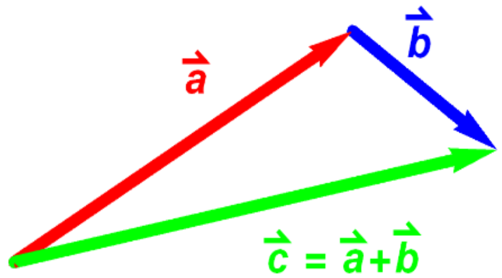
- ***Gebundene Vektoren*** sind speziell in einem Koordinatensystem festgelegt. Beispiel: ***Ortsvektoren*** $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ von Punkten P_1, P_2, P_3 im Raum werden immer vom Koordinatenursprung aus aufgetragen (s.Abb.).



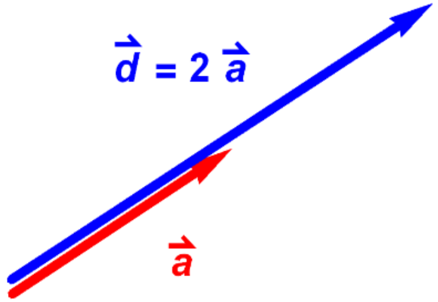
Gebundene Vektoren

9.2 Vektoroperationen :

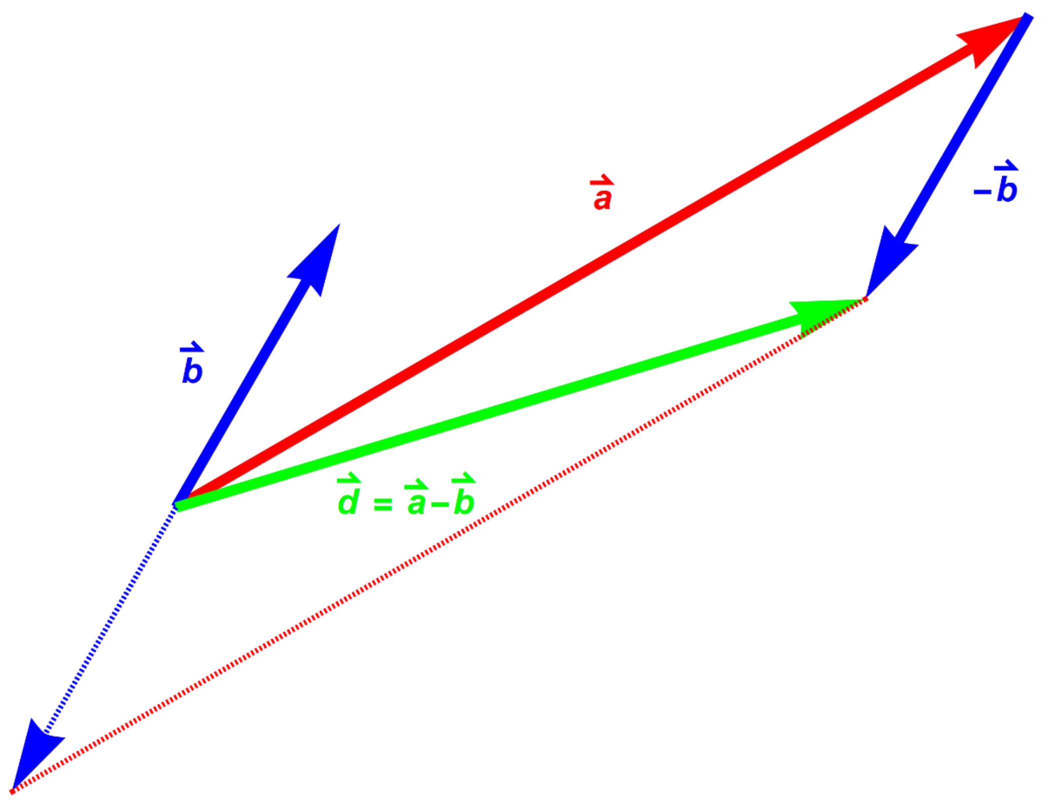
Vektoren kann man ***addieren*** ($\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$):



mit Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ ***multiplizieren*** ($\vec{d} = \lambda\,\vec{a}$):

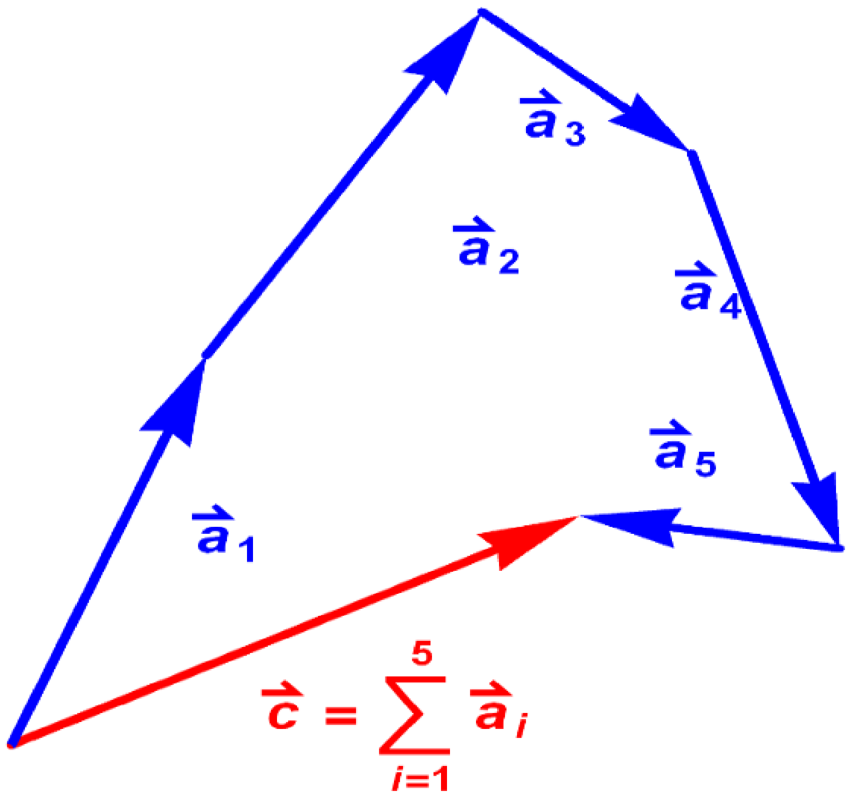


subtrahieren $(\vec{d} = \vec{a} - \vec{b})$:



mehrfach addieren

$$\vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5 = \sum_{i=1}^{5} \vec{a}_i$$

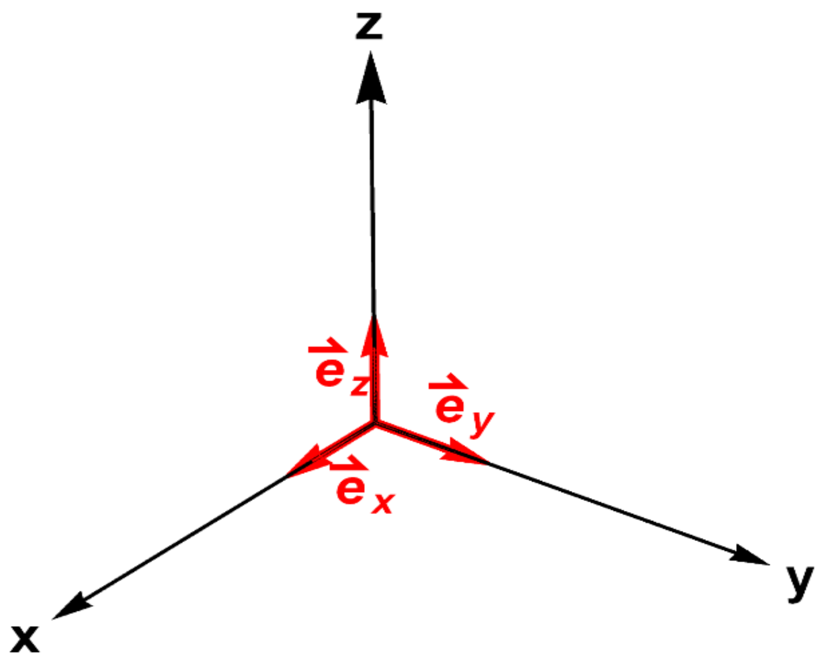


9.3 Darstellung von Vektoren:

9.3.1 Komponentendarstellung

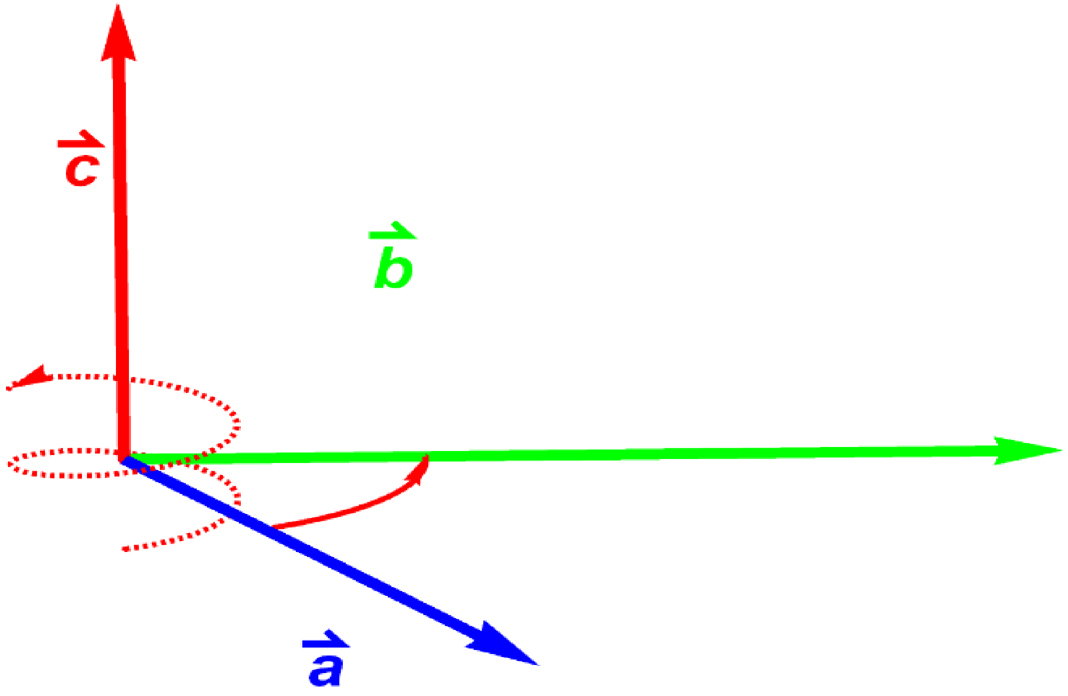
Definition 9.1:

Drei Vektoren $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$, die paarweise orthogonal sind und den Betrag =1 haben, heißt ***Orthonormalbasis (ONB) in*** $\mathbb{R}^3$



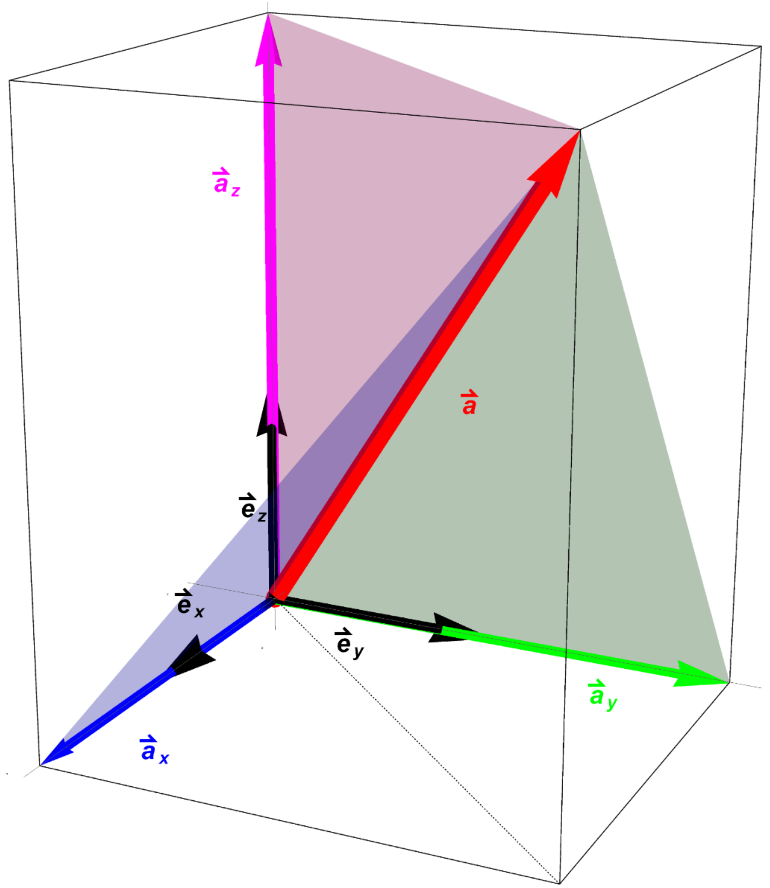
$\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ ***Orthonormalbasis (ONB) in*** $\mathbb{R}^3$

Ein ***Rechtssystem*** (s. Abb.) erkennt man auch durch die „***Korkenzieherregel***“: Man hat ein Rechtssystem, wenn man einen (Rechtshänder-) Korkenzieher vom Vektor $\vec{a}$ nach $\vec{b}$ (gegen den Uhrzeigersinn) dreht und die Spitze sich in Richtung $\vec{c}$ bewegt (eine formale Definition später).



Rechtssystem

Sei $\vec{a}$ ein beliebiger Vektor mit dem Ursprung bei 0. Dann heißen die drei senkrechten Projektionen von $\vec{a}$ auf die Koordinatenachsen $\{x, y, z\}$ ***Komponentenvektoren*** $\{\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z\}$, s. Abb.



Vektor mit Komponentenvektoren. Im Video LINK dreht sich der Vektor $\vec{a}$ mit seinen Komponenten im 3D-Raum.

http://sn.pub/rlgvhc

CDF-Link: http://sn.pub/iScszh

Formal erhält man die Komponentenvektoren durch Skalarprodukte (genaue Definition später):

$$\vec{a}_x = (\vec{a}, \vec{e}_x)\, \vec{e}_x$$
$$\vec{a}_y = (\vec{a}, \vec{e}_y)\, \vec{e}_y$$
$$\vec{a}_z = (\vec{a}, \vec{e}_z)\, \vec{e}_z$$

Die jeweiligen Beträge der Komponentenvektoren $\{\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z\}$ sind dabei die „Projektionen" (d.h. die Skalarprodukte) auf die Einheitsvektoren der Koordinatenrichtungen, sie heißen ***Koordinaten*** von $\vec{a}$:

$$a_x = (\vec{a}, \vec{e}_x)$$

$$a_y = (\vec{a}, \vec{e}_y)$$

$$a_z = (\vec{a}, \vec{e}_z)$$

dann gilt $$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

und $$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z.$$

9.3.2 Darstellung eines Vektors als Spaltenvektor

Wenn das Koordinatensystem in $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ festliegt, ist der Vektor $\vec{a}$ durch die Koordinaten $\{a_x, a_y, a_z\}$ vollständig beschrieben. Damit erhält man eine verkürzte Darstellung von $\vec{a}$, den ***Spaltenvektor***:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

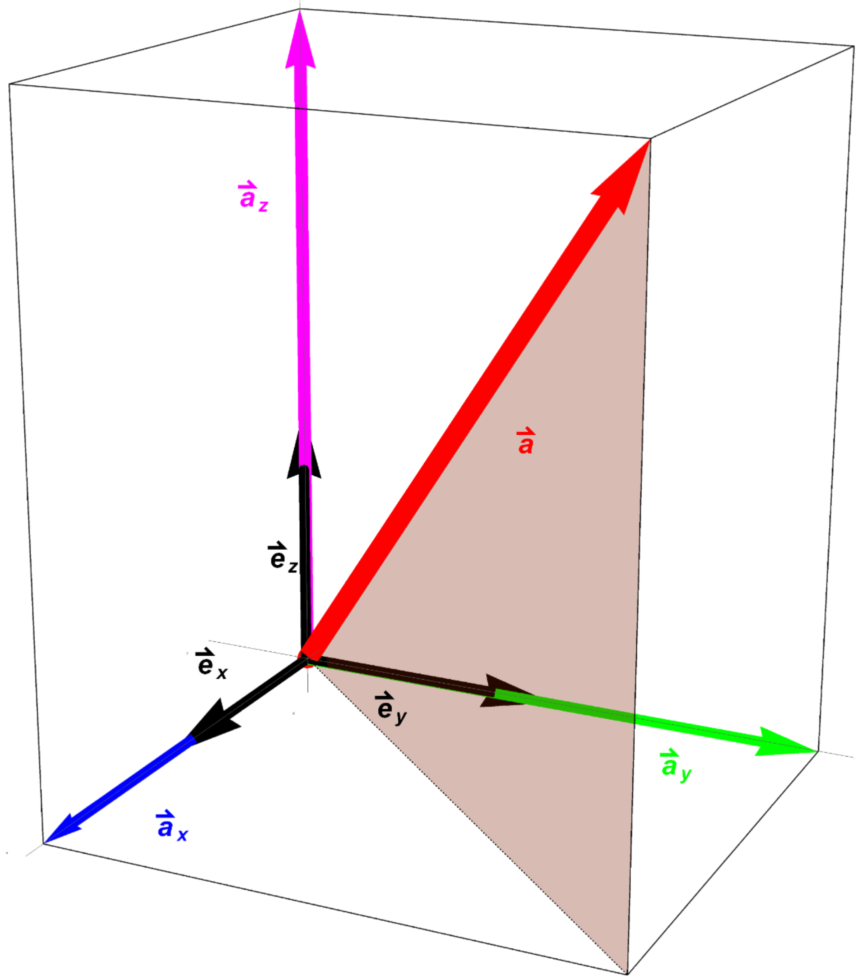
In diesem Sinne können wir schreiben:

$$\vec{a} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$$

Die Einheitsvektoren der Koordinatenrichtungen haben dann die Form

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der **Betrag** eines Vektors ergibt sich durch: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$



CDF-Link:
http://sn.pub/bEhobX

Vektor im 3D Koordinatensystem. In der CDF-Animation LINK kann man die Abb. 9.12 im 3D-Raum drehen.

9.4 Skalarprodukt (Inneres Produkt, Punktprodukt):

Definition 9.2:

Gegeben seien Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und der Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Dann heißt

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} := a\ b \cos(\varphi)$ ***Skalarprodukt*** von $\vec{a}$ mit $\overrightarrow{b}$. Schreibweise: $(\vec{a}, \vec{b})$

(2) Wenn gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (falls $\vec{a}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$), sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ***senkrecht*** (***orthogonal***) zueinander (Schreibweise: $\vec{a} \perp \vec{b}$).

Rechenregeln:

(9.6) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (Kommutativität)

(9.7) $\lambda\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = (\lambda\,\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(\lambda\,\vec{b}\right)$ (Assoziativität)

(9.8) $\left(\vec{a} \pm \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} \pm \vec{b} \cdot \vec{c}$ (Distributivität)

Für die drei Einheitsvektoren $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ gilt (sie bilden eine ***Orthonormalbasis, ONB***):

(9.9)
$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} \qquad \text{für } i, j = 1, 2, 3$$

In Komponentendarstellung

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

ergibt sich mit (9.9) das Skalarprodukt: (Übung: nachrechnen!)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \,,$$

Damit ist der **Betrag** von $\vec{a}$:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}$$

Der **Winkel** zwischen zwei Vektoren lässt sich berechnen aus:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a\ b} = \frac{\sum_{i=1}^{3} a_i b_i}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}\right)\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{3} b_i^2}\right)}$$

und somit ist

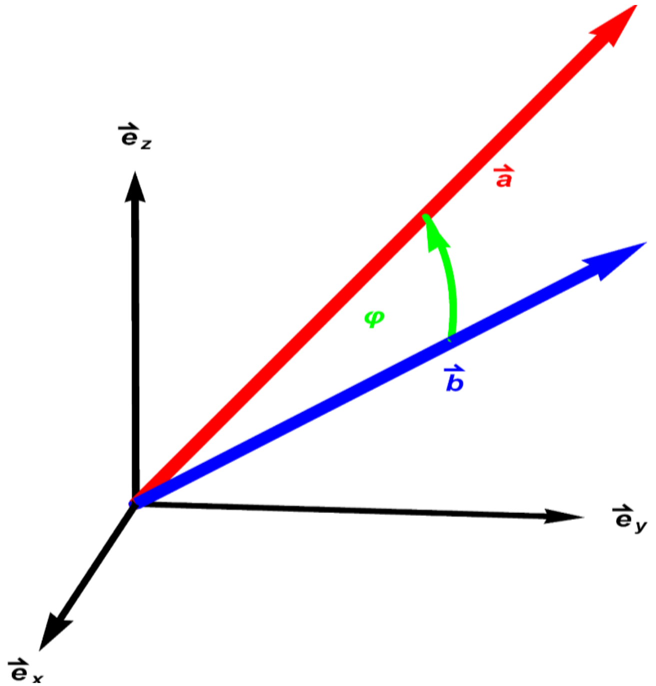
$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a\ b}\right)$$

Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 1,5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Dann ist der **Winkel** zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\ b}\right) = \arccos\frac{0,5+1+1,5}{\left(\sqrt{0,25+1+2,25}\right)\left(\sqrt{3}\right)} = 0.387Rad = 22,14°$$



9.5 Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt):

Definition 9.3:

Gegeben seien Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und der Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Dann definieren wir das ***Vektorprodukt*** als den Vektor
$\vec{c} := \vec{a} \times \vec{b}$ mit den Eigenschaften:

(1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

(2) $c = |\vec{c}| = a\, b \sin(\varphi)$

(3) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ bilden ein Rechtssystem

Rechenregeln für das Vektorprodukt:

(9.14) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (Anti-Kommutativität)

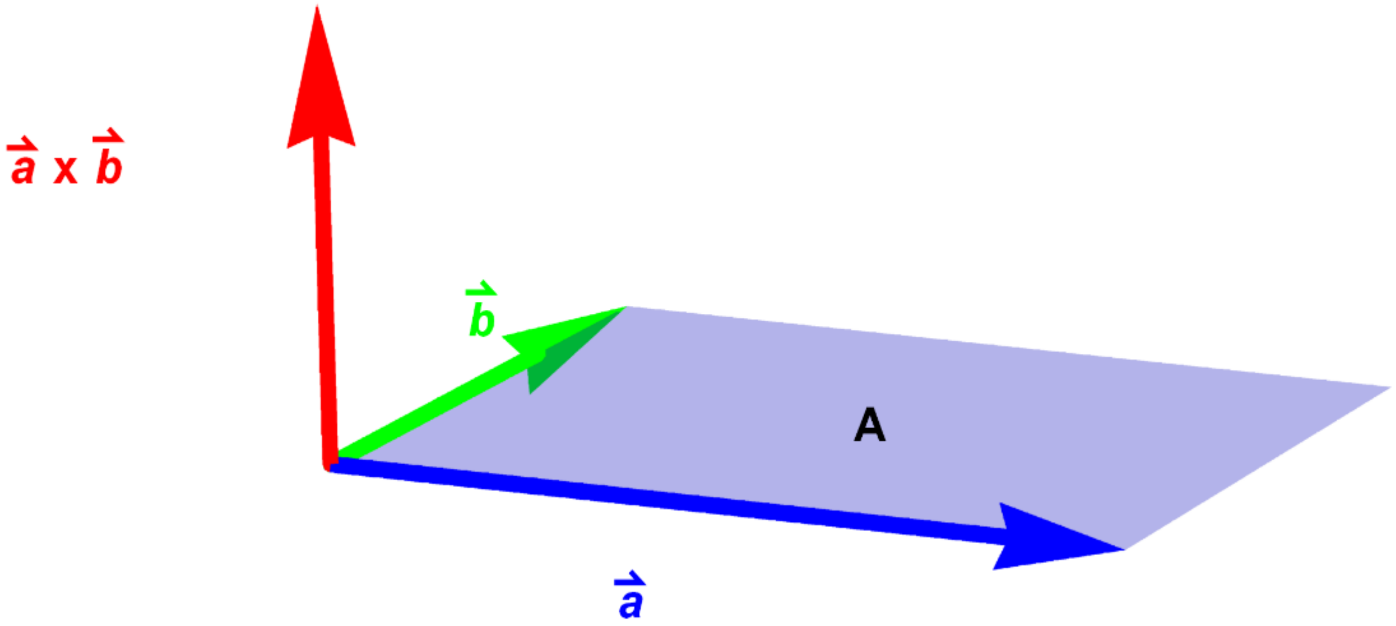
(9.15) $\lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (\lambda\,\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\,\vec{b}\right)$ (Distributivität 1)

(9.16) $(\vec{a} \pm \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) \pm (\vec{b} \times \vec{c})$ (Distributivität 2)

(9.17) $\vec{a} \times (\vec{b} \pm \vec{c}) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \pm (\vec{a} \times \vec{c})$ (Distributivität 3)

Der Betrag $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ des Kreuzprodukts ist gleich der Fläche A des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms (s. Abb.).

Wenn gilt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ (und falls $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$), genau dann sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ***kollinear***, d.h. parallel oder antiparallel.

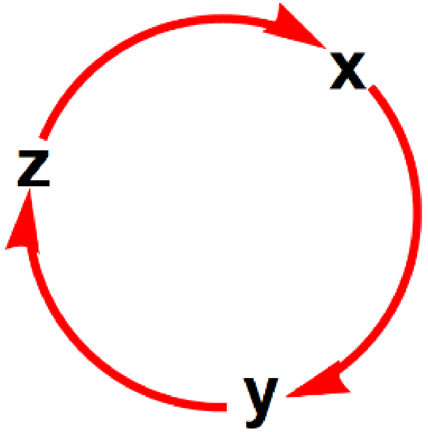


Kreuzprodukt von zwei Vektoren

Dann gilt für die Basisvektoren (beachte die zyklische Vertauschung der Indizes, s. Abb.)

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$$
$$\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x$$
$$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$

und $$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}.$$



Zyklische Vertauschung von *x*, *y*, *z*

Die Berechnung von $\vec{a} \times \vec{b}$ kann mit der Komponentendarstellung erfolgen:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y\, b_z - a_z\, b_y \\ a_z b_x - a_x\, b_z \\ a_x\, b_y - a_y\, b_x \end{pmatrix}$$

Beachte die zyklische Vertauschung der Indizes!

(Beweis durch Einsetzen der Komponentendarstellung der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.) (Übung: nachrechnen!)

Merkregel: Eine andere Berechnung von $\vec{a} \times \vec{b}$ kann erfolgen durch die formale Determinante (s. Kap. 11):

$$\vec{a} \times \vec{b} \overset{\text{(formal)}}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_x\left(a_y\, b_z - a_z\, b_y\right) - \vec{e}_y(a_x\ b_z - a_z\, b_x) + \vec{e}_z\left(a_x\, b_y - a_y\, b_x\right)$$

Beachte die zyklische Vertauschung der Indizes!

9.6 Spatprodukt (gemischtes Produkt):

Definition 9.4: Gegeben seien Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Dann heißt

$$\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] := \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$$

Spatprodukt von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$.

Daraus ergeben sich die **Rechenregeln**:

(9.20) $$\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \left[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}\right] = \left[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}\right]$$

(Zyklische Vertauschung ändert den Wert nicht.)

(9.21) $$\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = -\left[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}\right] = -\left[\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a}\right] = -\left[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}\right]$$

(Vertauschung zweier Vektoren ändert das Vorzeichen.)

Die Berechnung des Wertes erfolgt mit der Determinante (s. Merkregel und Kap. 11):

(9.22) $$\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

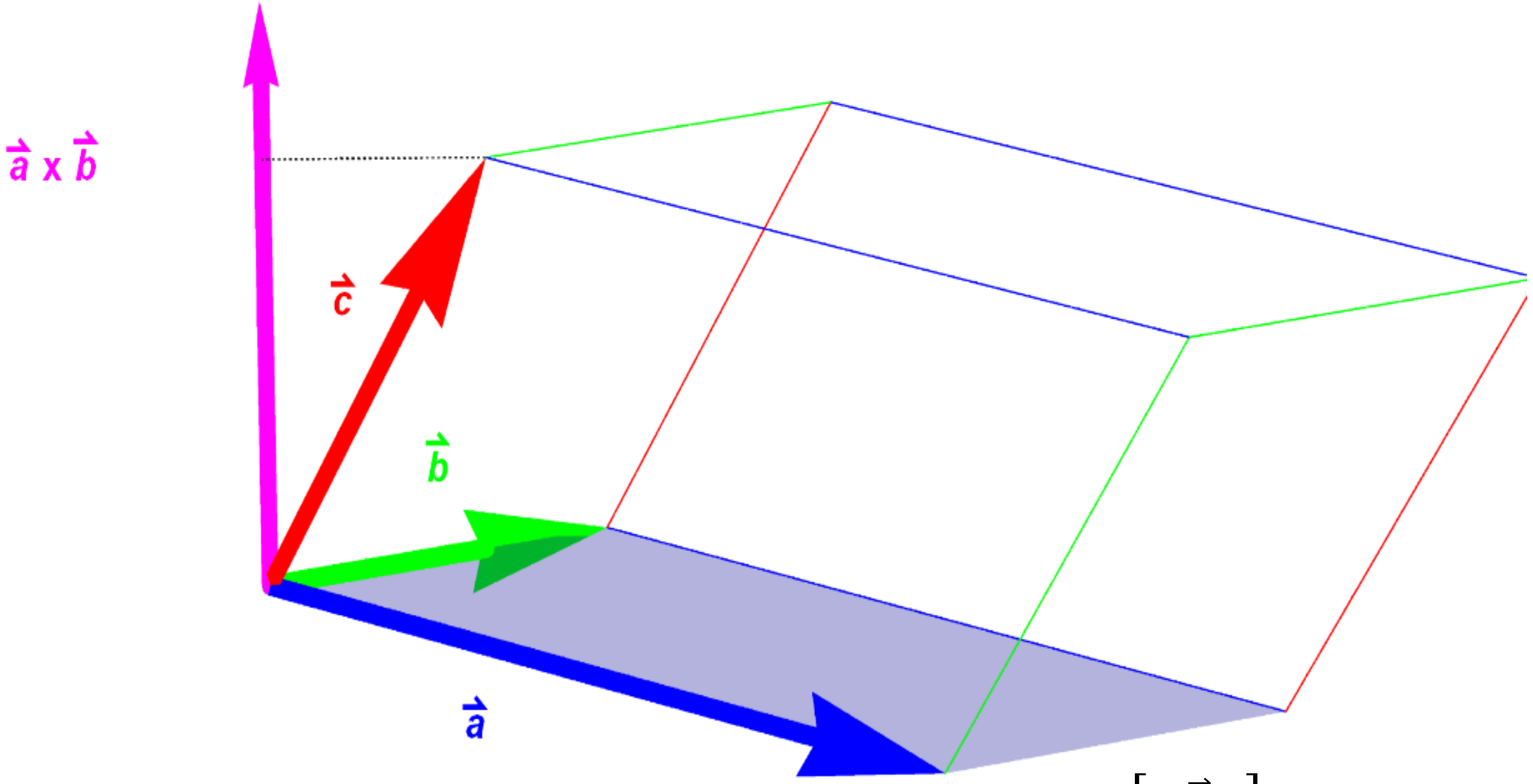
Damit ergibt sich das Spatprodukt in Komponentenform:

$$\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = a_x\left(b_y\, c_z - b_z\, c_y\right) + a_y\,(b_z\, c_x - b_x\ \ c_z) + a_z\left(b_x\, c_y - b_y\, c_x\right)$$

Mit Hilfe des Spatprodukts kann man nun Rechts- und Linkssysteme definieren:

Definition 9.5: Die Vektoren $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ bilden ein ***Rechtssystem*** ,

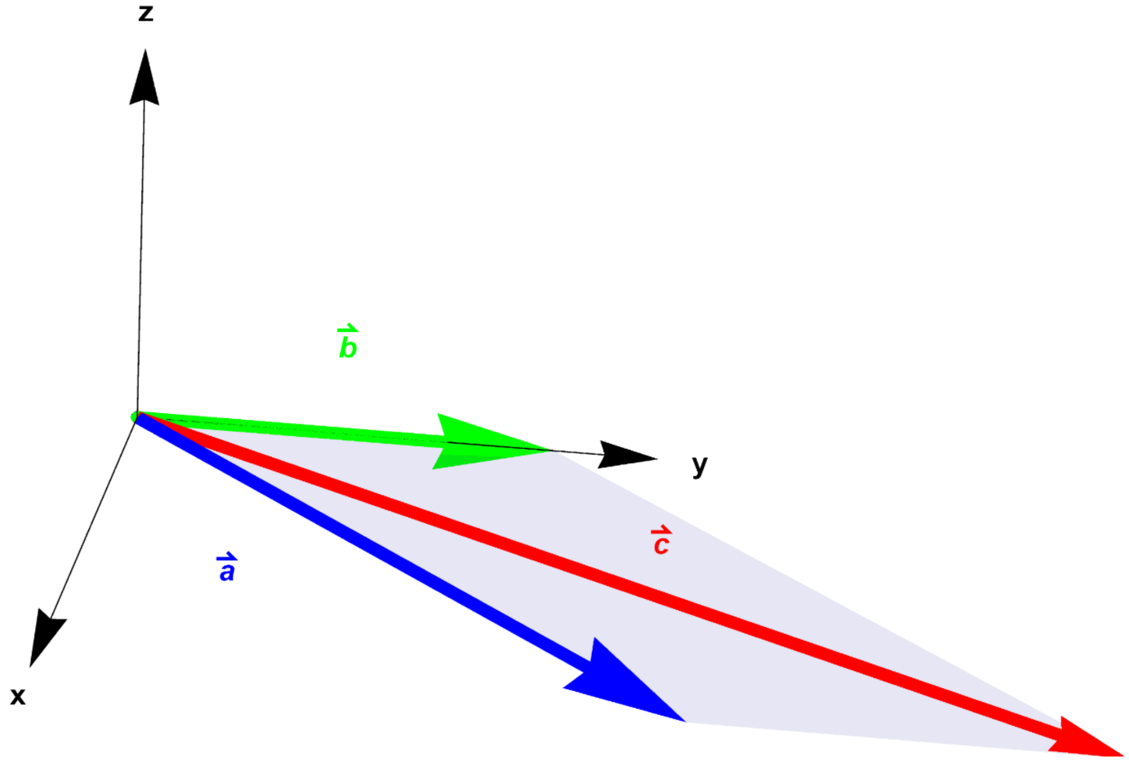
wenn $\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] > 0$ bzw. ein ***Linkssystem***, wenn $\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] < 0$



Spatprodukt dreier Vektoren $\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$

Der Betrag des Spatprodukts $\left|\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]\right|$ ist gleich dem Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats (s. Abb.).

Falls $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$ und $\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = 0$, genau dann gilt: Die Vektoren $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ sind „***komplanar***", d.h. sie liegen in einer Ebene (s. Abb).



Lineare Unabhängigkeit

Definition :

(1) Wenn gilt für

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3 \text{und } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

dann heißen die Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ ***linear unabhängig***.

(2) Wenn eines der $\lambda_i \neq 0$ ist, heißen sie ***linear abhängig***.

Beispiel 10.2 :

(1)Für drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$gilt:

$\vec{a}, \vec{b}\ und\ \vec{c}$ sind **linear abhängig** $\Leftrightarrow \left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = 0 \ \Leftrightarrow \vec{c}$ lässt sich als Linearkombination von $\vec{a}\ und\ \vec{b}$ darstellen (s. Abb. 10.1).

(2) Umgekehrt gilt:

$\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind **linear unabhängig** $\Leftrightarrow \left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] \neq 0 \ \Leftrightarrow \vec{c}$ lässt sich **nicht** als Linearkombination von $\vec{a}\ und\ \vec{b}$ darstellen (s. Abb. 10.2).

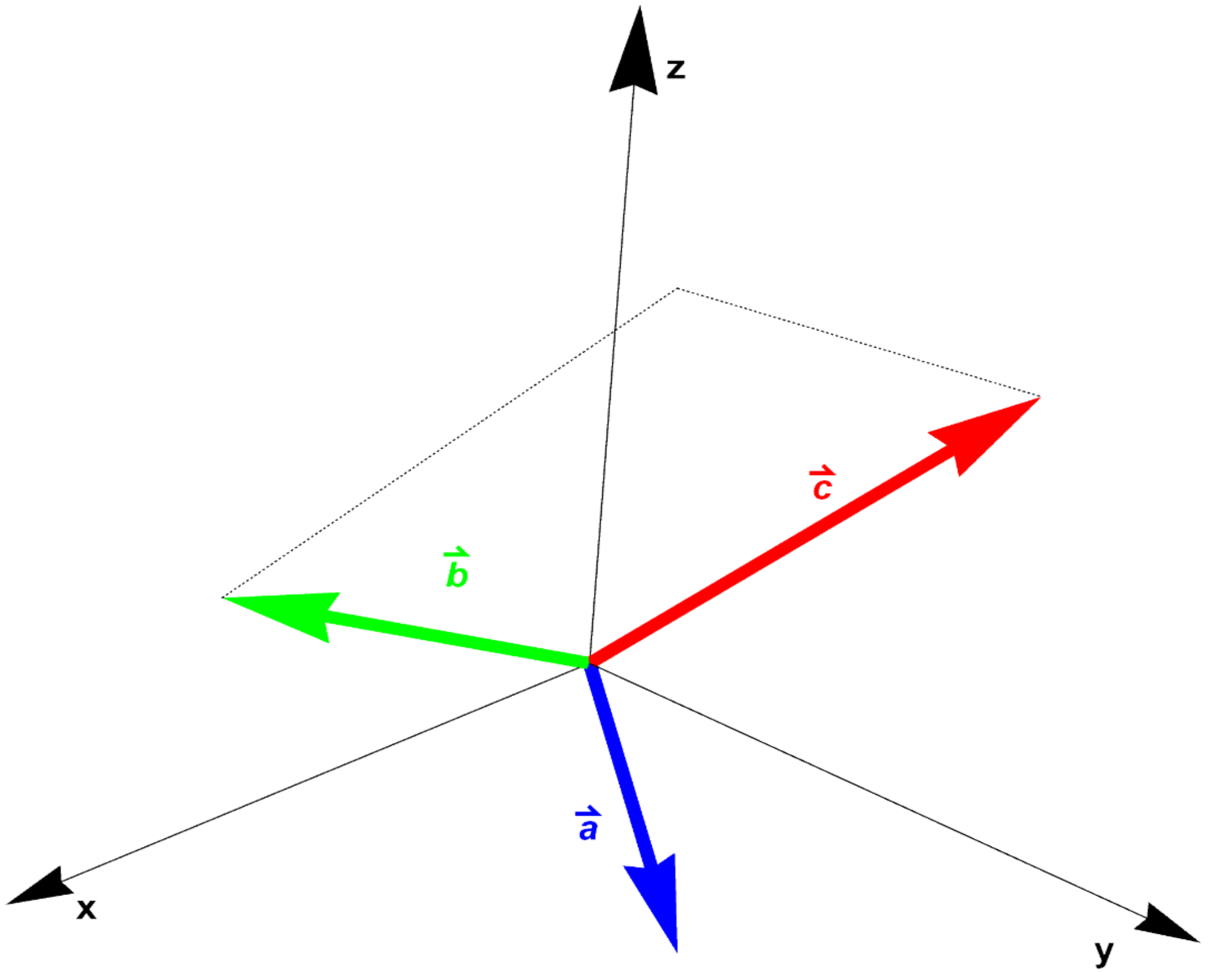


Abb. 10.2. Die Vektoren $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ sind linear unabhängig .

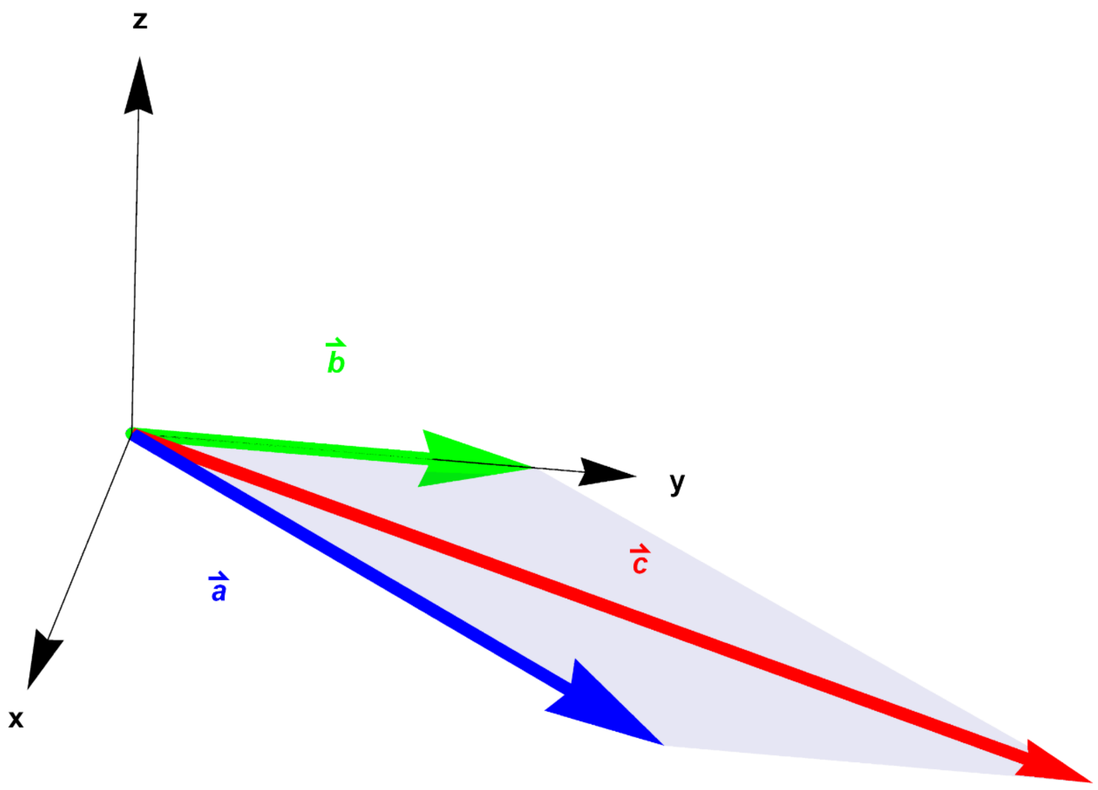


Abb. 10.1. Die Vektoren $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ sind linear abhängig (komplanar).