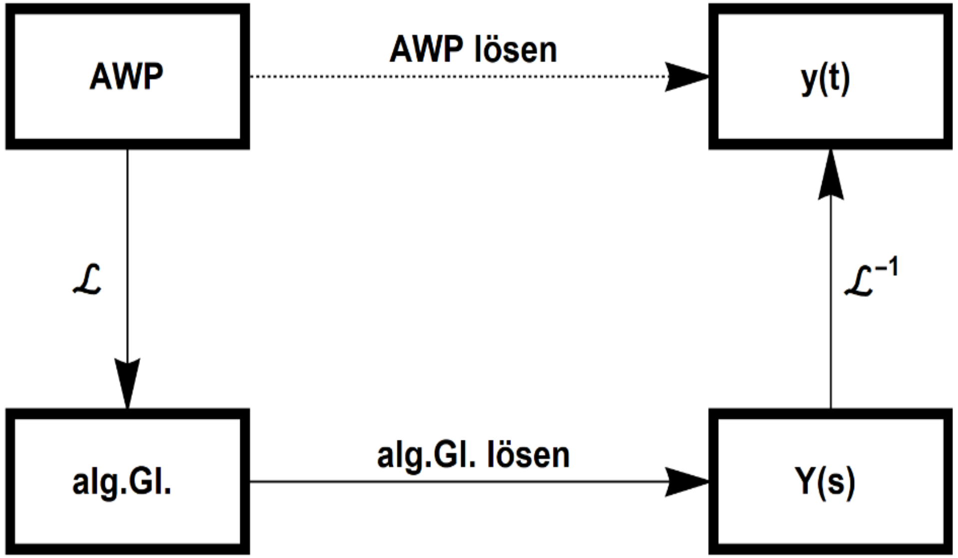
4.2 Laplace Transformationen Anwendungen

H.L.Cycon

Lösung von Anfangswert Problemen



Beispiel 21.5:

Gesucht ist die Lösung des AWP

$$y'(t) + 4y(t) = t + 2$$

mit der Anfangsbedingung (AB): $y(0) = 1$

1.Schritt: Laplace-Transformation der Gleichung, benutze den Differentiationssatzes (4) und die Laplace T.-Tabelle

$$sY(s) - 1 + 4Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}$$

2.Schritt: Auflösung nach $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+4)} + \frac{2}{s(s+4)} + \frac{1}{(s+4)}$$

3. Schritt: Laplace-Rücktransformation (mit Laplace T.-Tabelle)

$$\mathrm{y(t)} = \frac{e^{-4t}+4t-1}{16} + 2\,\frac{1-e^{-4t}}{4} + e^{-4t}$$

$$= \frac{9}{16}e^{-4t} + \frac{t}{4} + \frac{7}{16}$$

Zum Vergleich berechnen wir die „klassische“ Lösung (vgl. Kap. 13.2) des AWP

$$y'(t) + 4y(t) = t + 2$$

mit der (AB): $\quad y(0) = 1$

1.Schritt: Die homogene Lösung ist (mit Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$)

$y'(t) + 4y(t) = 0$, daraus folgt $\quad y_h(t) = Ce^{-4t}$ $für$ $C \in \mathbb{R}$

2. Schritt: Partikuläre Lösung

Ansatz: $y_p(t) = A\,t + B$

Dann ist ${y'}_p(t) = A$ und Einsetzen in Differentialgleichung ergibt:

$$A + 4(A\,t + B) = t + 2$$

Der Koeffizientenvergleich

$$4\,A = 1$$

$$A + 4\,B = 2$$

ergibt:

$$A = \frac{1}{4} \text{ und } B = \frac{7}{16}$$

Damit ist:

$$y_p(t) = \frac{t}{4} + \frac{7}{16}$$

3. Schritt: Allgemeine Lösung

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C\, e^{-4t} + \frac{t}{4} \; + \frac{7}{16}$$

4. Schritt: Lösung des AWP mit (AB):

$$y(0) = Ce^0 + 0 + \frac{7}{16} = 1, \qquad \text{also} \quad C = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

Somit ist die „klassische“ Lösung:

$$y(t) = \frac{9}{16} e^{-4t} + \frac{t}{4} \; + \frac{7}{16}$$

Dies stimmt mit der Laplace-Lösung überein!

Laplace-Transformation

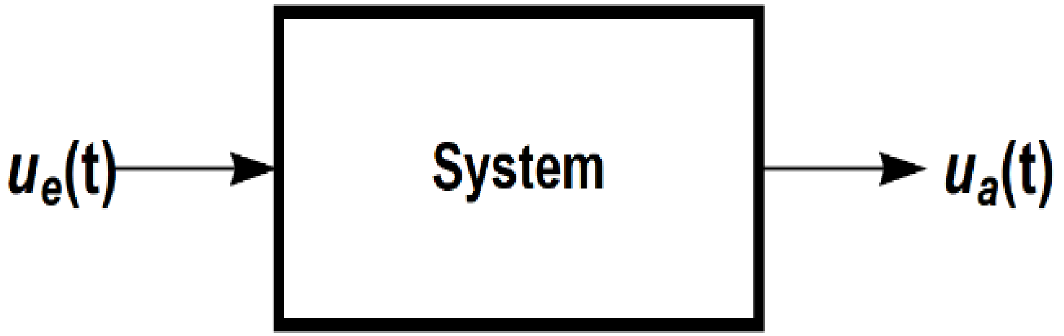
f(t)	F(s)
$\left.\begin{matrix}1(t)\\ \sigma(t)\end{matrix}\right\}$	1/s
t	$1/s^2$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\frac{1-e^{-at}}{a}$	$\frac{1}{s(s+a)}$
$\frac{e^{-at}+a\mathrm{t}-1}{a^2}$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$

Systemtheorie (Grundlagen)

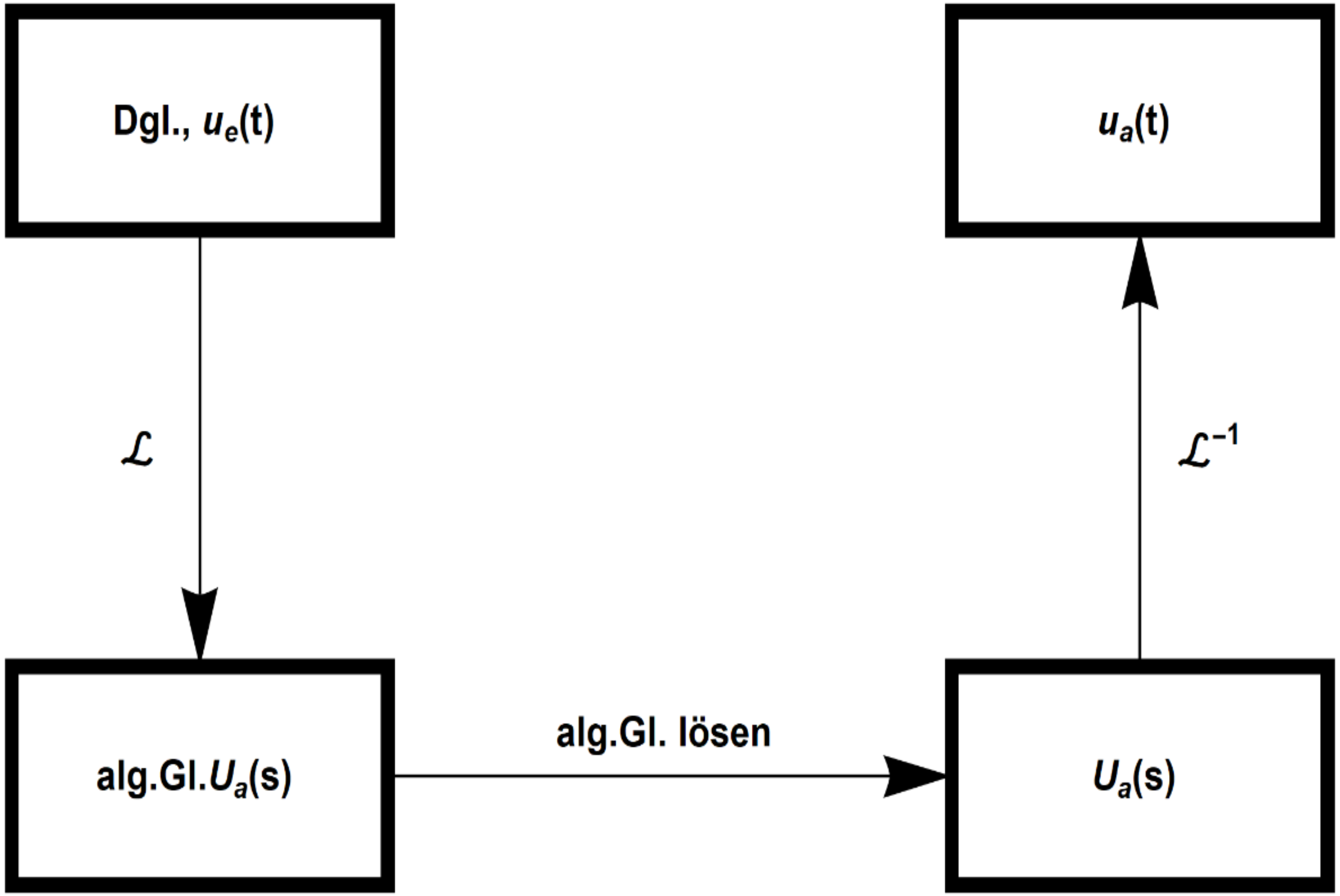
LTI- Systeme (LTI steht für Linear Time Independent)

Eingangssignal $u_e(t)$ und ein Ausgangssignal $u_a(t)$,

Der Zusammenhang wird mit linearen Differentialgleichungen beschrieben. Dabei ist $u_a(t)$ die Lösung der Differentialgleichung und $u_e(t)$ die Inhomogenität (Störfunktion).



Systemdarstellung mit Laplace-Transformationen



Die Auflösung der algebraischen Gleichung im Bildbereich nach $U_a(s)$ führt zu einer Multiplikation des Eingangssignals $U_e(s)$ mit einem Faktor $H(s)$:

$$U_a(s) = H(s)\, U_e(s)$$

$H(s)$ heißt **Übertragungsfunktion.**

$H(s)$ charakterisiert das LTI-System vollständig und ergibt sich durch

$$H(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)}, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Wenn man die Übertragungsfunktion $H(s)$ in den Zeitbereich zurücktransformiert, erhält man die zeitabhängige Funktion $h(t)$, das heißt, man hat die Korrespondenz

$$h(t) \quad \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad H(s).$$

Dann wird aus der Multiplikation

$$U_a(s) = H(s)\, U_e(s)$$

im Bildbereich eine Faltung im Zeitbereich (s. Faltungssatz (11)):

$$u_a(t) = h(t) * u_e(t)$$

Wir haben somit folgendes Schema :

Ausgangsignal Zeit- und Bildbereich

$$\begin{tikzcd}
u_a(t) \arrow[d, "\mathcal{L}"'] & = & h(t) & * & u_e(t) \\
U_a(s) & = & H(s) & & U_e(s) \arrow[u, "\mathcal{L}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Wählt man als Eingangsfunktion $u_e(t)$ die Deltafunktion $\delta(t)$, dann heißt die Ausgangsfunktion $u_a\,(t)$ ***Impulsantwort*** und $h(t)= u_a\,(t)$, denn die Faltung mit der Deltafunktion wirkt wie ein „neutrales Element“

$$u_a\,(t) = h(t) * \delta(t) = h(t)$$

Damit ist in diesem Fall die Laplace-Rücktransformierte $h(t)$ der Übertragungsfunktion $H(s)$ die Impulsantwort.

Die Impulsantwort liefert Aussagen über das Stabilitätsverhalten des Systems

Die Übertragungsfunktion $H(s)$ ist eine komplexwertige Funktion mit der unabhängigen komplexen Variablen $s \in \mathbb{C}$. Sie hat im Allgemeinen die Form:

$$H(s) = \frac{b_m(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_m)}{a_n(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}, \qquad s \in \mathbb{C}$$

Dabei sind $\{s_i\}_{i=1\dots m}$ die Nullstellen und $\{p_k\}_{k=1\dots n}$die Pole von $H(s)$ in der s-Ebene.

Beispiel 21.6: Stabilität

Betrachte die Differentialgleichung

$$u_a''(t) + 2d\, u_a'(t) + {\omega_0}^2\, u_a(t) = u_e(t)$$

mit den Anfangsbedingungen $u_a'(0) = 0, u_a''(0) = 0 \text{ und } 0 < \mathrm{d} < \omega_0$

Dann ist die Störfunktion $u_e(t)$ das Eingangssignal und die Lösung der DGL $u_a(t)$ das Ausgangssignal des Systems.

Wenn wir die Stabilität des Systems testen wollen setzen wir $u_e(t) = \delta(t)$ und berechnen die Impulsantwort $u_a(t)$.

Im Bildbereich (nach Laplace-Transformation) haben wir dann:

$$s^2 U_a(s) + 2\mathrm{d}\, s\, U_a(s) + {\omega_0}^2 U_a(s) = U_e(s)$$

Es folgt

$$\left(s^2 + 2d\, s + {\omega_0}^2\right) U_a(s) = U_e(s)$$

und somit

$$U_a(s) = \frac{1}{(s^2 + 2d\, s + {\omega_0}^2)} U_e(s).$$

Damit ist die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{U_a\,(s)}{U_e\,(s)} = \frac{1}{(s^2 + 2d\,s + \ \omega_0{}^2)} = \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$\left(s^2 + 2d\,s + \ \omega_0{}^2\right) = 0$$

ist die Charakteristische Gleichung der DGL

mit den Lösungen

$$p_1 = -d + j\sqrt{\omega_0{}^2 - d^2}$$

und

$$p_2 = -d - j\sqrt{\omega_0{}^2 - d^2}$$

Dieses sind die Pole der Übertragungsfunktion   H(s).

Wenn wir $\alpha := -d < 0$ und $\omega_d := \sqrt{{\omega_0}^2 - d^2}$ setzen, erhalten wir für

$$p_1 = \alpha + j\omega_d \quad \text{und} \quad p_2 = \alpha - j\omega_d$$

Dann ist die Impulsantwort (s. Laplace - Tabelle):

$$h(t) = \frac{1}{2\mathrm{j}\omega_d}\left(e^{(\alpha+\mathrm{j}\omega_d)t} - e^{(\alpha-\mathrm{j}\omega_d)t}\right) = e^{\alpha t}\,\frac{\left(e^{(\mathrm{j}\omega_d)t} - e^{(-\mathrm{j}\omega_d)t}\right)}{2\mathrm{j}\omega_d}$$

Mit der Eulerschen Gleichung der Sinusfunktion haben wir die Impulsantwort:

$$h(t) = \frac{e^{\alpha t}}{\omega_d} \sin(\omega_d t)$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist dann

$$u_a\,(t) = h(t) * u_e\,(t).$$

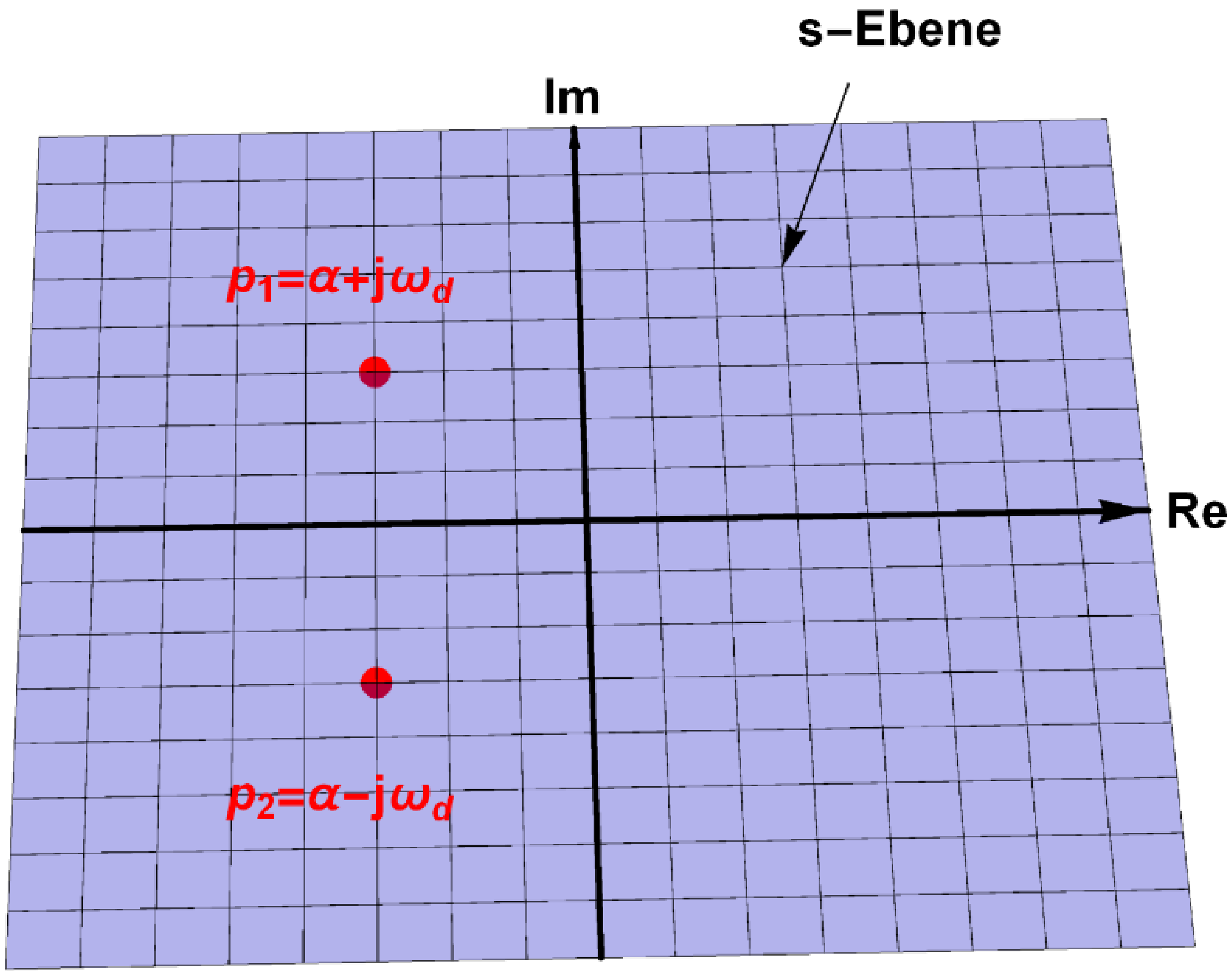
Die Impulsantwort fällt exponentiell ab da $\alpha < 0$, das System ist damit stabil.

Die Polstellen von $H(s)$ (= Nullstellen der charakteristischen Gleichung) liegen bei:

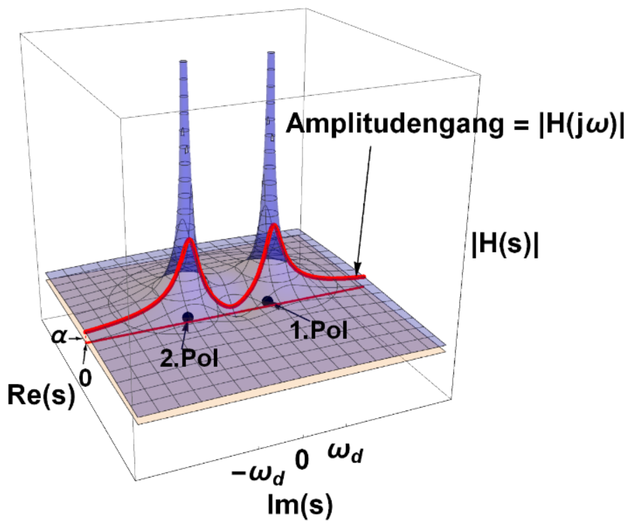
$$p_1 = \alpha + j\omega_d \quad \text{und} \quad p_2 = \alpha - \mathrm{j}\omega_d \ \text{ mit } \alpha = d < 0$$

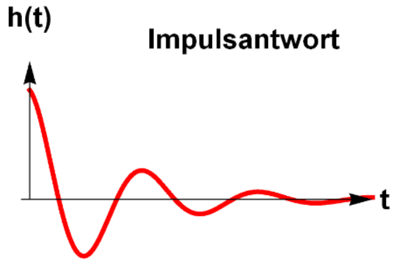
Dies ist ein Kriterium für Stabilität.

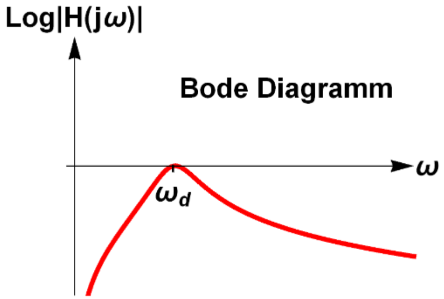
Das System ist stabil $\Leftrightarrow$ Alle Pole von H(s) liegen in der linken Halbebene: $\alpha<0$

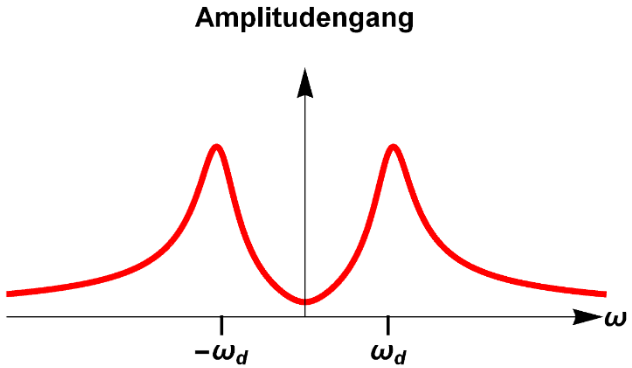


s-Ebene eines stabilen Systems $\alpha<0$


Amplitudengang = |H(jω)|
|H(s)|
α
1.Pol
2.Pol
Re(s)
0
−ω_d
0
ω_d
Im(s)


h(t)
Impulsantwort
t


Log|H(jω)|
Bode Diagramm
ω
ω_d


Amplitudengang
ω
−ω_d
ω_d

Dabei liegen die Polstellen von $H(s)$ (= Nullstellen der charakteristischen Gleichung) bei:

$$p_1 = \alpha + j\omega_d \quad \text{und} \quad p_2 = \alpha - \mathrm{j}\omega_d \ \text{ mit } \alpha = d < 0$$

fällt Impulsantwort exponentiell ab und das System ist stabil.

Beispiel 21.8: Instabilität

Betrachte die Differentialgleichung (s. Abb. 21.14):

$$y''(t) - 2d\, y'(t) + {\omega_0}^2\, y(t) = \delta(t) \qquad \text{mit } 0 < \mathrm{d} < \omega_0$$

Dann ist die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 - 2d\,\lambda + {\omega_0}^2 = 0$$

Mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = d \pm j\sqrt{{\omega_0}^2 - d^2} =: \alpha \pm \mathrm{j}\omega_d$$

ist die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

Wobei gilt $\lambda_{1,2} = p_{1,2} =: \alpha \pm \mathrm{j}\omega_d$

und die Impulsantwort lautet :

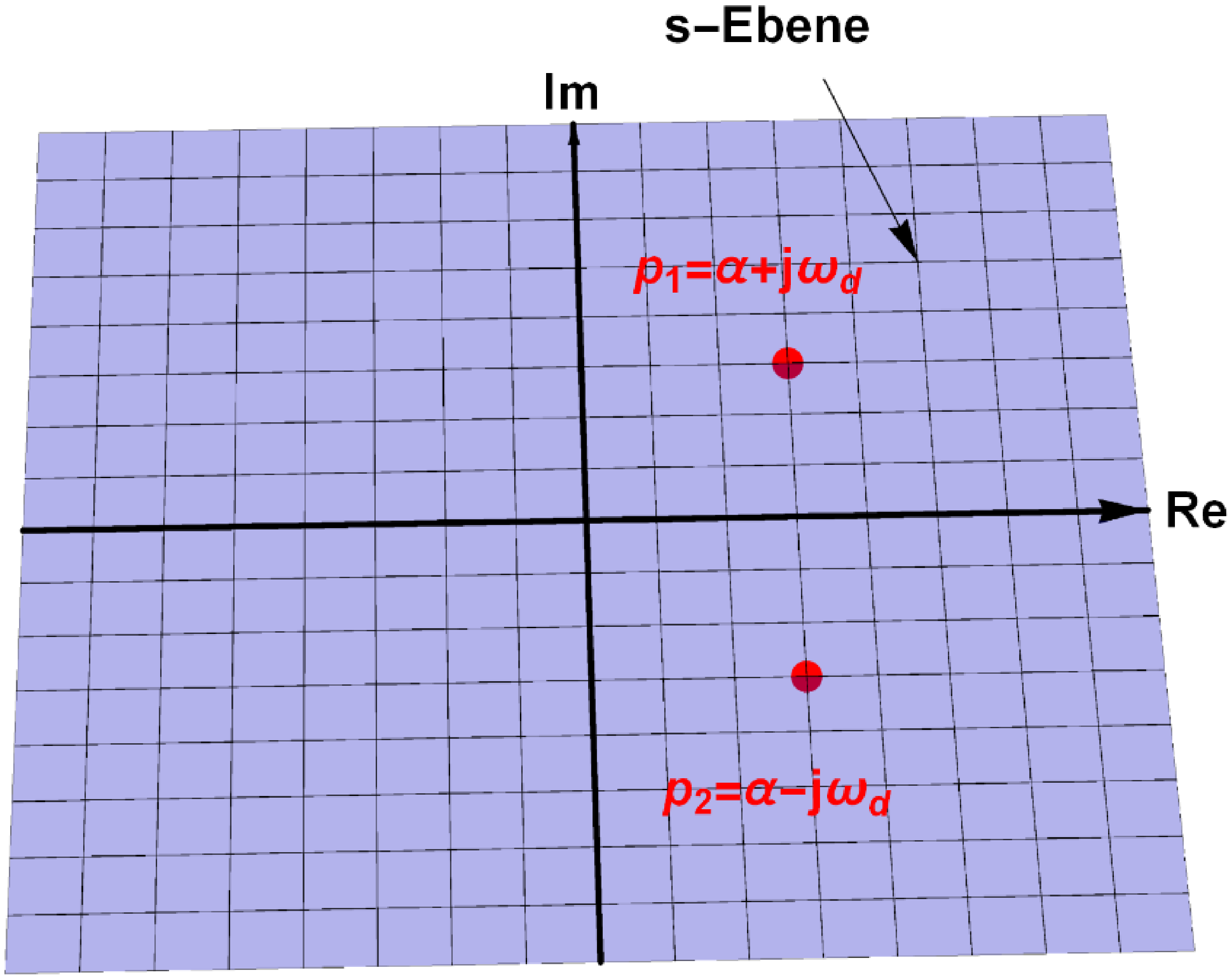
$$h(t) = \frac{e^{\alpha t}}{\omega_d} \sin(\omega_d t)$$

Dabei liegen die Polstellen von $H(s)$ (= Nullstellen der charakteristischen Gleichung) bei:

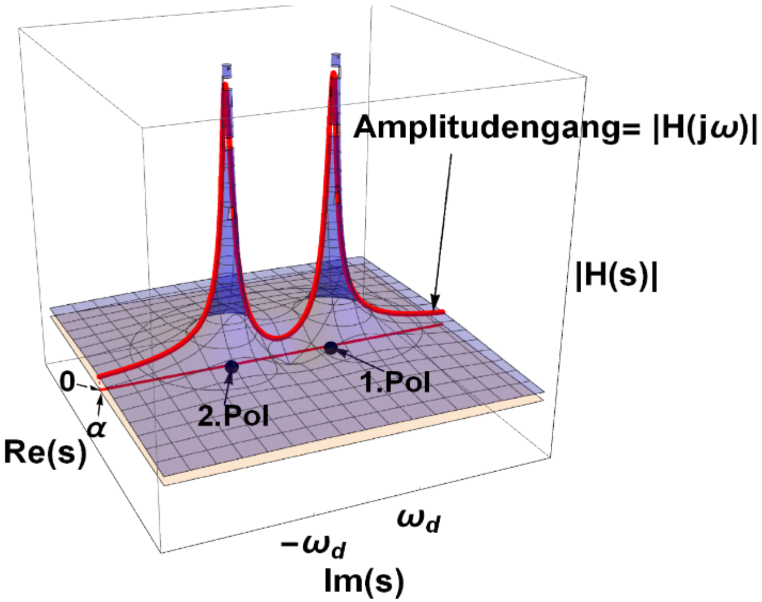
$$p_1 = \alpha + j\omega_d \quad \text{und} \quad p_2 = \alpha - \mathrm{j}\omega_d \text{ mit } \alpha = d > 0$$

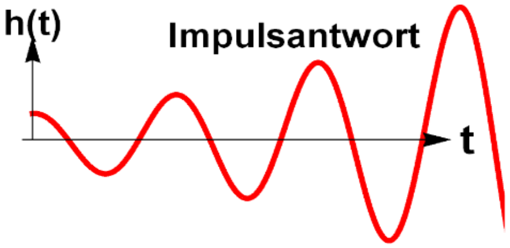
Da $\alpha > 0$ ist, steigt die Impulsantwort exponentiell an und das System ist instabil.

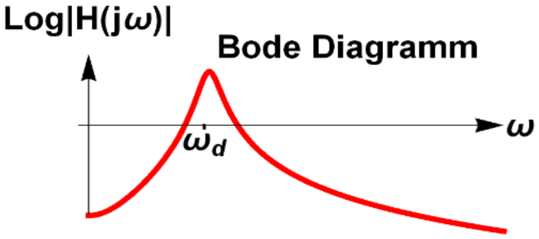
Das System ist instabil $\Leftrightarrow$ Ein Pol von H(s) liegt in der rechten Halbebebene: $\alpha > 0$

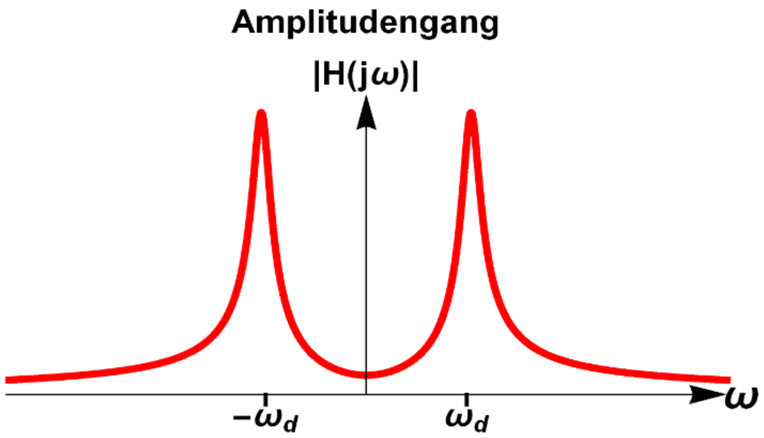


s-Ebene eines instabilen Systems $\alpha>0$

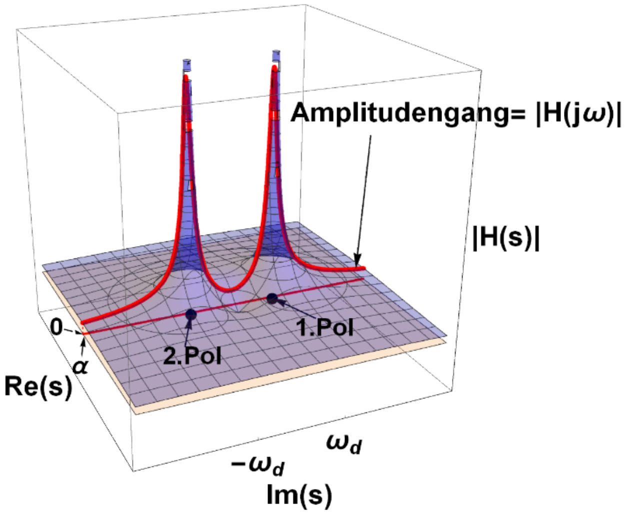

Amplitudengang= |H(jω)|
|H(s)|
0
α
Re(s)
2.Pol
1.Pol
ω_d
−ω_d
Im(s)

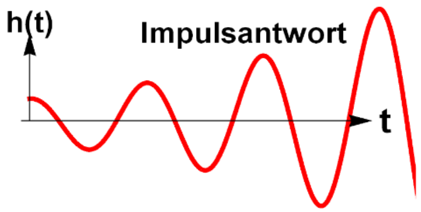

h(t)
Impulsantwort
t

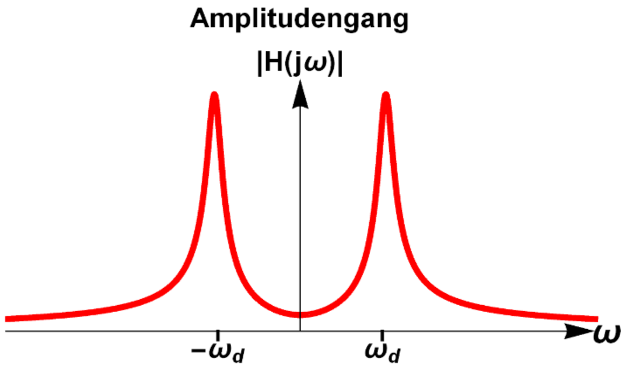

Log|H(jω)|
Bode Diagramm
ω
ω_d

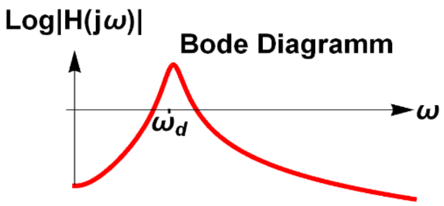

Amplitudengang
|H(jω)|
−ω_d
ω_d
ω

Wenn die Realteile der Polpositionen sich von negativ zu positiv ändern, wird das System instabil.









http://sn.pub/onDolX