Partialbruchzerlegung

Anwendungen

Motivation

Betrachte die Summe von 2 Brüchen:

$$\frac{A_1}{(x-r_1)}+\frac{A_2}{(x-r_2)}=\frac{A_1(x-r_2)+A_2(x-r_1)}{(x-r_1)(x-r_2)}$$

Die Zusammenfassung zu einem Bruch erfolgt über „Hauptnenner bilden“.
Die Frage ist, geht das auch umgekehrt, dh. kann man einen Bruch zerlegen in Teilbrüche?

Sei $\frac{p(x)}{q(x)}$ eine echt gebrochene rationale Funktion, d.h.

Grad(p(x))< Grad(q(x)) und z. B.

$q(x)$ ein Polynom 3.Grades, mit den Wurzeln r_1, r_2, r_3

$$q(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

Dann kann man $\frac{p(x)}{q(x)}$ zerlegen in einfache Brüche:

1. Schritt:
Ansatz

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)} = \frac{A_1}{(x-r_1)} + \frac{A_2}{(x-r_2)} + \frac{A_3}{(x-r_3)}$$

(Gesucht sind die A_i!)

2. Schritt: Hauptnenner $(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3) = q(x)$ bilden:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1(x-r_2)(x-r_3) + A_2(x-r_1)(x-r_3) + A_3(x-r_1)(x-r_2)}{(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)}$$

Zählergleichheit ergibt:

$$p(x) = A_1(x - r_2)(x - r_3) + A_2(x - r_1)(x - r_3) + A_3(x - r_1)(x - r_2)$$

3. Schritt: Ausmultiplizieren der rechten Seite und Koeffizientenvergleich ergibt ein lineares Gleichungssystem (LGS, s. Kap. 12):

$$\begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} & \dots & \mathrm{a}_{13} \\ . & . & . \\ \mathrm{a}_{31} & \dots & \mathrm{a}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 \\ . \\ \mathrm{A}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{c}_1 \\ . \\ \mathrm{c}_3 \end{pmatrix}$$

4. Schritt: Lösen des LGS ergibt

$$A_1, A_2, A_3$$

damit haben wir die gesucht Zerlegung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x - r_1)} + \frac{A_2}{(x - r_2)} + \frac{A_3}{(x - r_3)}$$

Beispiel 1:

Gegeben sei

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{8x^2 - 2}{(x^2-4)(x-3)}$$

Gesucht: Zerlegung in einfache Brüche

(Anwendung: Integralrechnung, Laplace Transformationen)

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_2}{(x-2)} + \frac{A_3}{(x-3)}$$

1.Schritt: Zerlegung von $q(x)$ in (reell wertige) Linearfaktoren und Ansatz Partialbruchzerlegung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{8x^2 - 2}{(x^2-4)(x-3)} =$$

$$\frac{8x^2 - 2}{(x+2)(x-2)(x-3)} = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_2}{(x-2)} + \frac{A_3}{(x-3)}$$

(Gesucht sind die A_i!)

2.Schritt: Hauptnenner bilden, Zählergleichheit ergibt:

$$p(x) = 8x^2 - 2 = \left(\frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_2}{(x-2)} + \frac{A_3}{(x-3)}\right)(x+2)(x-2)(x-3)$$

$$\Longrightarrow$$

$$= A_1(x-2)(x-3) + A_2(x+2)(x-3) + A_3(x+2)(x-2)$$

3.Schritt: Ausmultiplizieren der rechten Seite:

$$8x^2 - 2 = A_1\left(x^2 - 5x + 6\right) + A_2\left(x^2 - x - 6\right) + A_3\left(x^2 - 4\right)$$

$$= (A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (-5A_1 - A_2)x + 6A_1 - 6A_2 - 4A_3$$

und Koeffizientenvergleich :

x^2: $\quad A_1 + A_2 + A_3 = 8$

x^1: $\quad -5A_1 - A_2 = 0$

x^0: $\quad 6A_1 - 6A_2 - 4A_3 = -2$

ergibt ein LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \\ 6 & -6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4.Schritt: Lösen des LGS

$$A_1 = \frac{3}{2},\ A_2 = \frac{-15}{2},\ A_3 = 1$$

Damit ist die gesuchte Zerlegung:

$$\frac{8x^2 - 2}{(x^2-4)(x-3)} = \frac{3}{2(x+2)} - \frac{15}{2(x-2)} + \frac{1}{(x-3)}$$

Beispiel 2:

Gegeben sei ein Bruch mit doppelter Wurzel

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{(x+1)(x-1)^2}$$

Gesucht: Zerlegung in drei einfache reell wertige Brüche

1.Schritt: Ansatz spezielle Partialbruchzerlegung in reell wertige Brüche, z.B.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{A_2}{(x-1)} + \frac{A_3}{(x-1)^2}$$

2.Schritt: Hauptnenner bilden, Zählergleichheit ergibt:

$$1= \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{A_2}{(x-1)} + \frac{A_3}{(x-1)^2} (x+1)(x-1)^2$$

$$\Longrightarrow$$

$$1= A_1\,(x-1)^2 + A_2\,(x+1)\,(x-1) + A_3\,(x+1) =$$

$$(A_1 + A_2 + A_3\,) + (-\,2\,A_1 + A_3)\,x + (A_1 + A_2\,)\,x^2$$

3.Schritt: Ausmultiplizieren der rechten Seite:

$$1 = (A_1 - A_2 \; + A_3\,) + (-\; 2\,A_1 \; + A_3)\,x + (A_1 + A_2\,)\,x^2$$

und Koeffizientenvergleich :

$$\begin{array}{lr} x^2: & A_1 + A_2 \; = 0 \\ x^1: & -\,2\,A_1 \; + A_3 = 0 \\ x^0: & A_1 - A_2 \; + A_3 = 1 \end{array}$$

ergibt ein LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.Schritt: Lösen des LGS

$$A_1 = \frac{1}{4},\ A_2 = \frac{-1}{4},\ A_3 = \frac{1}{2}$$

Damit ist die gesuchte Zerlegung:

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2}$$

Bemerkung:
Anwendung bei Laplace –Rücktransformationen
die L-Rücktransformation (s. Binomi Kap.8.6) ist dann:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)^2} = \frac{1}{4(s+1)} - \frac{1}{4(s-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$y(t) = \frac{1}{4}\, e^{-t} - \frac{1}{4}\, e^{t} + \frac{1}{2}\, t\, e^{-t}$$

Beispiel 3:

Gegeben sei ein Bruch mit komplexwertigen Wurzeln (aus Laplace Transformation)

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{1 + s(1+s)}{(4+s^2)(1+s)}$$

Gesucht: Zerlegung in Brüche die L-Rücktransformierbar sind z.B.:

$$\frac{s}{(4+s^2)} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \text{Cos(2t)} \quad , \quad \frac{2}{(4+s^2)} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \text{Sin(2t)} \quad , \quad \frac{1}{(1+s)} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} e^{-t}$$

1.Schritt: Ansatz spezielle Partialbruchzerlegung in L-Rück-transformierbare Brüche:

$$\frac{1+s(1+s)}{(4+s^2)(1+s)} = A_1 \frac{s}{(4+s^2)} + A_2 \frac{2}{(4+s^2)} + A_3 \frac{1}{(1+s)}$$

2.Schritt: Erweitern mit Hauptnenner $(4+s^2)(1+s)$:

$$1+s(1+s) = \left(A_1 \frac{s}{(4+s^2)} + A_2 \frac{2}{(4+s^2)} + A_3 \frac{1}{(1+s)}\right)\left(4+s^2\right)(1+s)$$

$$= A_1\, s(1+s) + A_2 2(1+s) + A_3\,(4+s^2)$$

3.Schritt: Ausmultiplizieren der rechten Seite

$$1 + s + s^2 = A_1\, s + A_1\, s^2 + 2\, A_2 + 2\, A_2\, s + 4\, A_3 + A_3\, s^2$$

und Koeffizientenvergleich :

$$\begin{array}{lr} s^2: & A_1 + A_3 = 1 \\ s^1: & A_1 + 2\, A_2 = 1 \\ s^0: & 2\, A_2 + 4A_3 = 1 \end{array}$$

ergibt das LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.Schritt: Lösen des LGS

$$A_1 = \frac{4}{5},\ A_2 = \frac{1}{10},\ A_3 = \frac{1}{5}$$

Damit ist die gesuchte Zerlegung:

$$\frac{1 + s(1+s)}{(4+s^2)(1+s)} = \frac{4}{5}\frac{s}{\left(4+s^2\right)} + \frac{1}{10}\frac{2}{\left(4+s^2\right)} + \frac{1}{5}\frac{1}{(1+s)}$$

Bemerkung:

und die gesuchte L-Rücktransformation (s. Binomi Kap.8.6) ist :

$$Y(s) = \frac{1+s(1+s)}{(4+s^2)(1+s)} = \frac{4}{5}\frac{s}{(4+s^2)} + \frac{1}{10}\frac{2}{(4+s^2)} + \frac{1}{5}\frac{1}{(1+s)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$y(t) = \frac{4}{5}\,\mathrm{Cos}(2t) + \frac{1}{10}\,\mathrm{Sin}(2t) + \frac{1}{5}\,e^{-t}$$

Beispiel 4: Gegeben sei das Anfangswert Problem

$$y''(t) + 2\,y'(t) + 2\,y(t) = 2$$

mit den Anfangswerten $y(0)=0$, $y'(0)=2$

Gesucht: die Lösung $y(t)=?$

Die Laplace Transformation des AWP ist:

$$s^2 Y(s) - 2 + 2sY(s) + 2Y(s) = \frac{2}{s}$$

Damit ist

$$Y(s)\,(s^2 + 2s + 2) = \frac{2}{s} + 2$$

$$Y(s) = \frac{2}{s(s^2+2s+2)} + \frac{2}{(s^2+2s+2)}$$

Gesucht ist die L- Rücktransformierte y(t) von Y(s).

Wir betrachten den Bruch mit komplexwertigen Wurzeln

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{2}{s(s^2+2s+2)}$$

und zerlegen dies in Brüche die L-Rücktransformierbar sind :

(s. Binomi Kap.8.6):

$$\frac{s}{(s^2+2s+2)} \quad \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad e^{-t}\,(\mathrm{Cos}(t) - \mathrm{Sin}(t)) \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{s} \quad \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad 1$$

1.Schritt:

Ansatz (s.Bartsch, Taschenbuch Mathematische Formeln S.480)

$$\frac{2}{s(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B+s\,C}{(s^2+2s+2)}$$

Gesucht sind A,B und C.

2.Schritt: Erweitern mit Hauptnenner $s(s^2+2s+2)$:

$$2 = \left(\frac{A}{s} + \frac{B+s\,C}{(s^2+2s+2)}\right)\left(s\left(s^2+2s+2\right)\right) =$$

$$= A\left(s^2+2s+2\right) + (B+s\,C)s$$

3.Schritt: Ausmultiplizieren der rechten Seite

$$2 = A\left(s^2 + 2s + 2\right) + (B + s\,C)s$$

$$2 = A\,s^2 + 2\,s\,A + 2\,A + Bs + \;C\,s^2$$

Koeffizientenvergleich :

$$\begin{array}{lr}
s^2: & A + C = 0 \\
s^1: & 2A\; + B = 0 \\
s^0: & 2A = 2
\end{array}$$

ergibt das LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4.Schritt: Lösen des LGS :

A =1; B= −2; C= −1;

Damit ist die gesuchte Zerlegung:

$$\frac{2}{s(s^2+2s+2)} = \frac{1}{s} + \frac{-2-s}{(s^2+2s+2)}$$

Damit ist die gesuchte L-Rücktransformation (s. Binomi Kap.8.6) von

$$Y(s) = \frac{2}{s(s^2+2s+2)} + \frac{2}{(s^2+2s+2)} = \frac{1}{s} + \frac{-2-s}{(s^2+2s+2)} + \frac{2}{(s^2+2s+2)}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s}{(s^2+2s+2)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$y(t) = 1 + e^{-t}\,(\mathrm{Cos}(t) - \mathrm{Sin}(t))$$