Potenzreihen und Taylor-Reihen

Wie bei den Zahlenreihen betrachten wir nun Funktionenreihen, anschaulich „unendliche“ Summen von Funktionen. Dabei beschränken wir uns hier auf Summen von Polynomen, sogenannte Potenzreihen. Polynome sind „einfache“ Funktionen. Das heißt, sie sind einfach differenzierbar und integrierbar und daher für vereinfachende Approximationen geeignet.

Sei $\{a_n\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge. Betrachte die Summe der Polynome

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_0}_{P_0(x)} + a_1 x}_{P_1(x)} + a_2 x^2}_{P_2(x)} + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n}_{P_n(x)} + \cdots$$

....

....

für $x \in \mathbb{R}$.

Auch hier kann man die „unendliche“ Summe der $a_n x^n$ nicht direkt berechnen. Man betrachtet daher zunächst **endliche** Teilsummen (Partialsummen), d.h.:

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$ ist die **n−te Partialsumme**

Dann hat man für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine **Zahlenfolge** (falls man die Koeffizienten a_k kennt)

$$\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} = \{P_0(x), P_1(x), \quad P_2(x), P_3(x), \dots, P_k(x), \dots\}$$

und deren **Grenzwert**

$$P(x) := \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

der (falls existent) für geeignete $x \in \mathbb{R}$ als $P(x)$ definiert werden kann:

die sogenannte ***Potenzreihe***.

Schreibweise:

$$P(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (7.2)$$

Beispiel 7.1: (vgl. Beispiel 4.8, geometrische Reihe mit $p = \frac{x}{2}$)

Sei

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k .$$

Dann ist die Reihe konvergent für $|p| = \left|\frac{x}{2}\right| < 1$, also für $|x| < 2$.

Erinnerung:

Beispiel 4.8: Die ***geometrische Reihe***

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} p^{\,k}$$

ist konvergent (für $|p| < 1$) und
der Grenzwert der Reihe ist

$$S := \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} p^{\,k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-p^{n+1}}{1-p} = \frac{1}{1-p}\,.$$

Somit ist für $\mathrm{p} = \frac{1}{2}$:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \left({}^{1}/_{2}\right)^{k} = 2$$

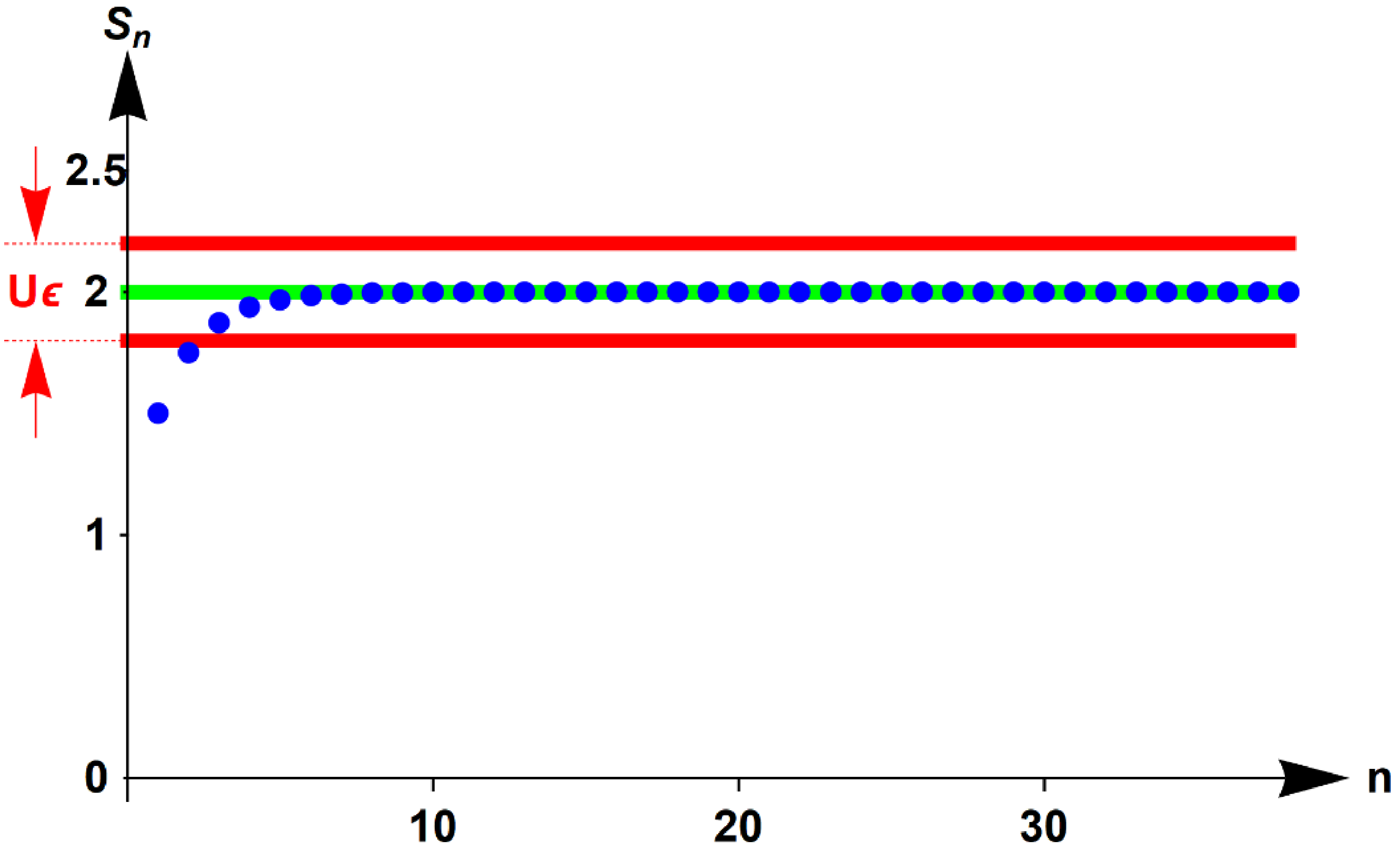


Abb. 4.8. Geometrische Reihe

Ende Erinnerung!

Bemerkung:

Die allgemeine (verschobene) Form einer Potenzreihe hat die Form

(7.3) $$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \, ,$$

wobei der Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ***Entwicklungspunkt*** heißt.

Das heißt, der Entwicklungspunkt x_0 kann ein beliebiger Punkt auf der *x*-Achse sein.

Das **Problem** ist, daß die Konvergenz der Potenzreihe auch von $x \in \mathbb{R}$ Abhängt (nicht für alle x konvergiert die Reihe!):

Die Reihe

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

heißt ***konvergent* für $\boldsymbol{x}$** $\in \mathbb{R}$ und hat den ***Grenzwert P(x)***, wenn die Folge

der Partialsummen $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent (gegen *P*(*x*)) ist.

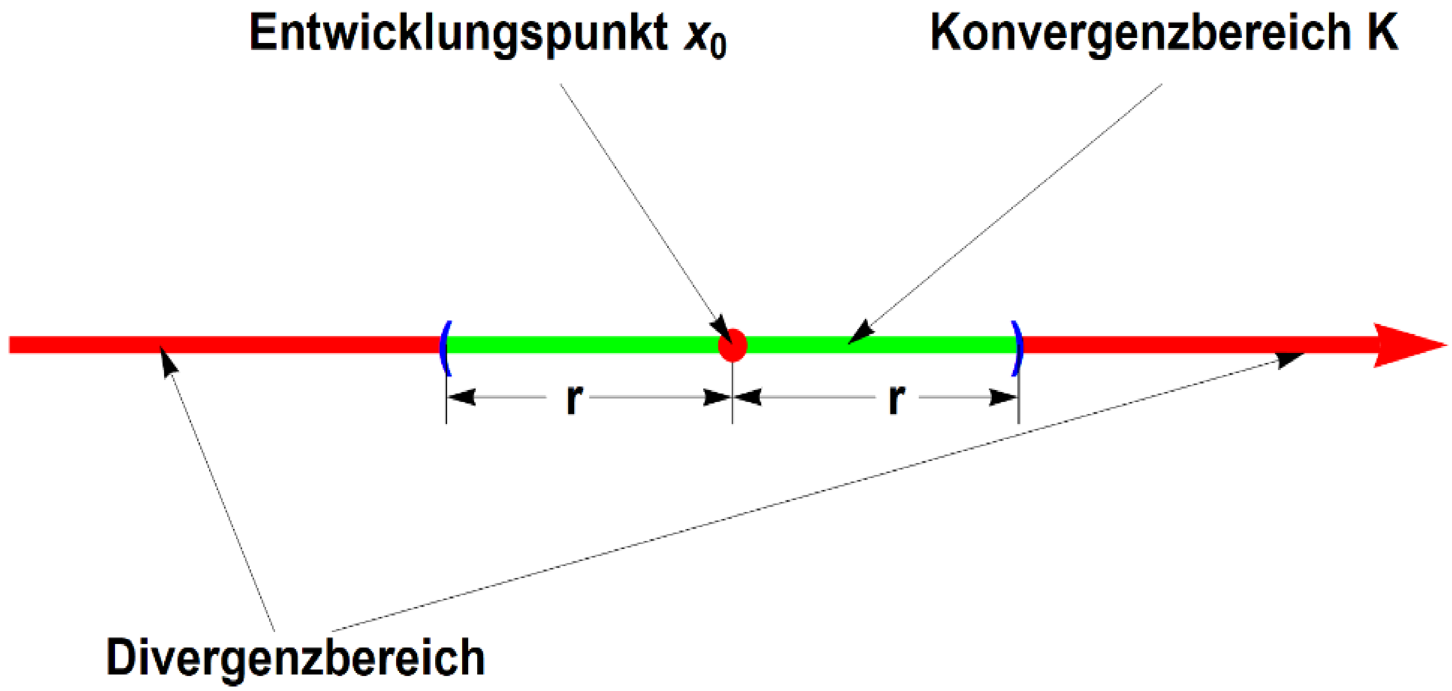
Daher braucht man einen neuen Begriff:

Die Menge ***K*** aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe $\{P_n(x)\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$ konvergent ist, heißt ***Konvergenzbereich*** der Reihe.

Der Konvergenzbereich hat die Form

$$\mathrm{K} = \{x \in \mathbb{R},\ \text{mit}\ |x - x_0| < r\} := (x_0 - r, x_0 + r)$$

r heißt ***Konvergenzradius***



Der ***Konvergenzradius*** lässt sich aus den Koeffizienten der Reihe berechnen:

$$r = \lim_{k \to \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$$

Beispiel 7.3: Betrachte die Reihe

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Dann ist der Konvergenzradius

$$r = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{k+1!}} \right) = \lim_{k\to\infty} (k+1) = \infty$$

Somit ist der Konvergenzbereich

$$K = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

und für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

eine wohldefinierte Funktion:

$$P(x) = e^x$$

(siehe Taylor-Reihe der e-Funktion, Beispiel 7.4).

Taylor-Reihen

Wir betrachten jetzt eine spezielle Art von Polynomen, nämlich sogenannte „Schmiegepolynome“, die sich an eine gegebene Funktion „anschmiegen“. Diese Polynome werden zu einer Potenzreihe, wobei die einzelnen Polynome die gegebene Funktion immer besser approximieren.

Wir definieren die „Schmiegepolynome“:

Definition 7.2:

Gegeben sei eine Funktion $f(x),\ x \epsilon D_f$ und f sei an der Stelle $x_0 \epsilon D_f$ „beliebig oft“ differenzierbar (das heißt, alle Ableitungen existieren).

Dann heißt das Polynom

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k \quad , x \in D_f \tag{7.6}$$

Taylor-Polynom-ten Grades von f an der Stelle x_0.

x_0 heißt ***Entwicklungspunkt.***

Die Zahlen

$$a_k := \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \tag{7.7}$$

heißen ***Koeffizienten*** der Taylor - Polynome.

$T_n(x)$ ist ein Appoximationspolynom n-ten Grades für $f(x)$ und heißt auch „Schmiege-Polynom". $T_n(x)$ genügt den sogenannten

„***Schmiegebedingungen***":

(7.8) $$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \;\; f\text{ür } alle\; k = 0,1,2,\ldots,n$$

Das heißt, **alle Ableitungen** der Ordnung *k* der **Funktion *f*** an der Stelle x_0 stimmen mit den **Ableitungen des Polynoms $\boldsymbol{T_n}$** überein.

Für die x, für die die Folge der Taylor-Polynome $\{T_n(x)\}_{n\in N}$ konvergiert, d.h. für die

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) =: T(x)$$

gilt, schreibt man die Reihe

$$T(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Diese „unendliche Summe" heißt dann die ***Taylor-Reihe*** von f an der Stelle x_0.

Beispiel 7.4: Sei $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ und $x_0 = 0$.
Dann ist

$$f^{(k)}(x_0) = e^{x_0} = 1 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

und somit haben wir :

$$T_n(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$$

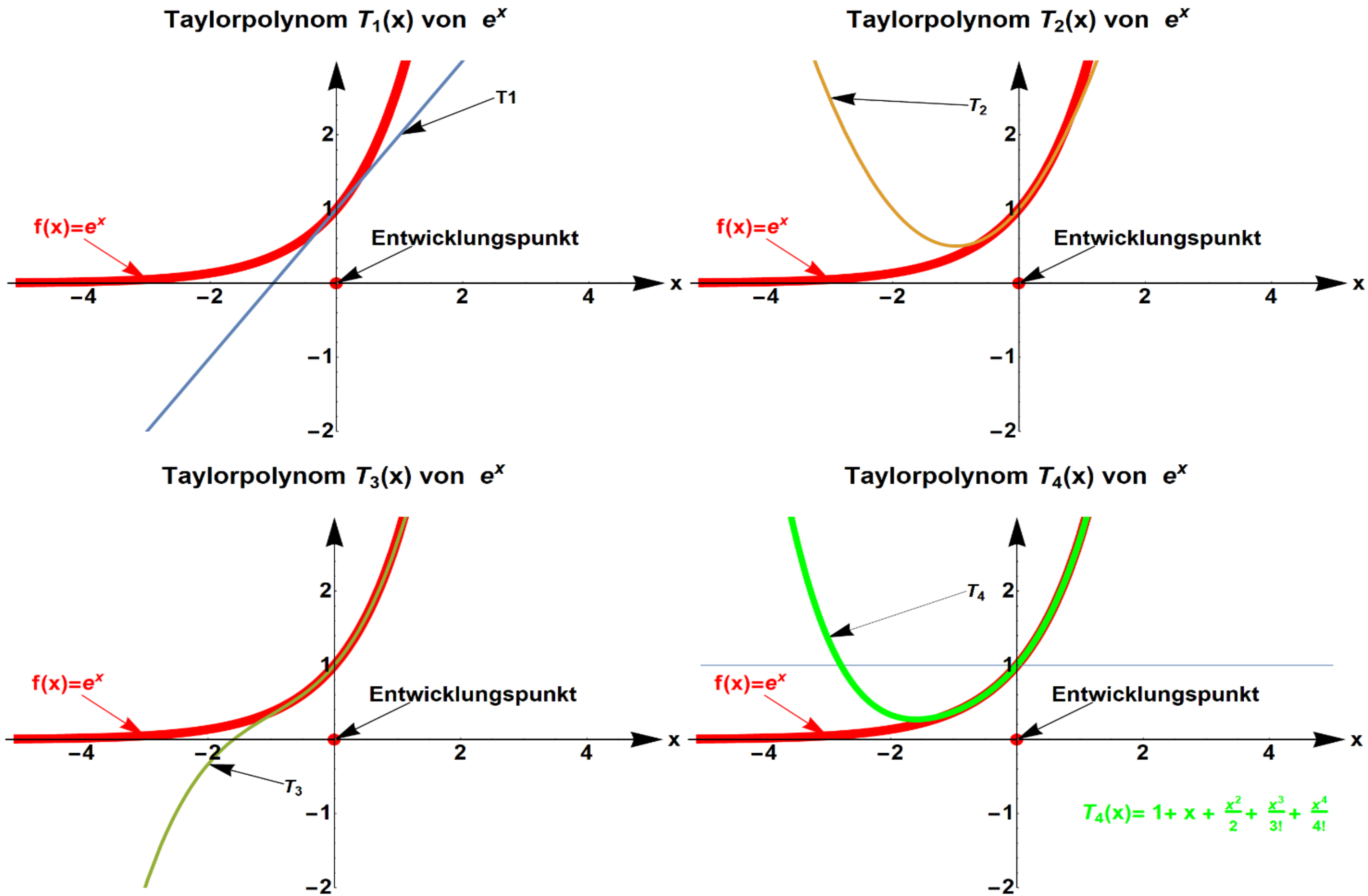
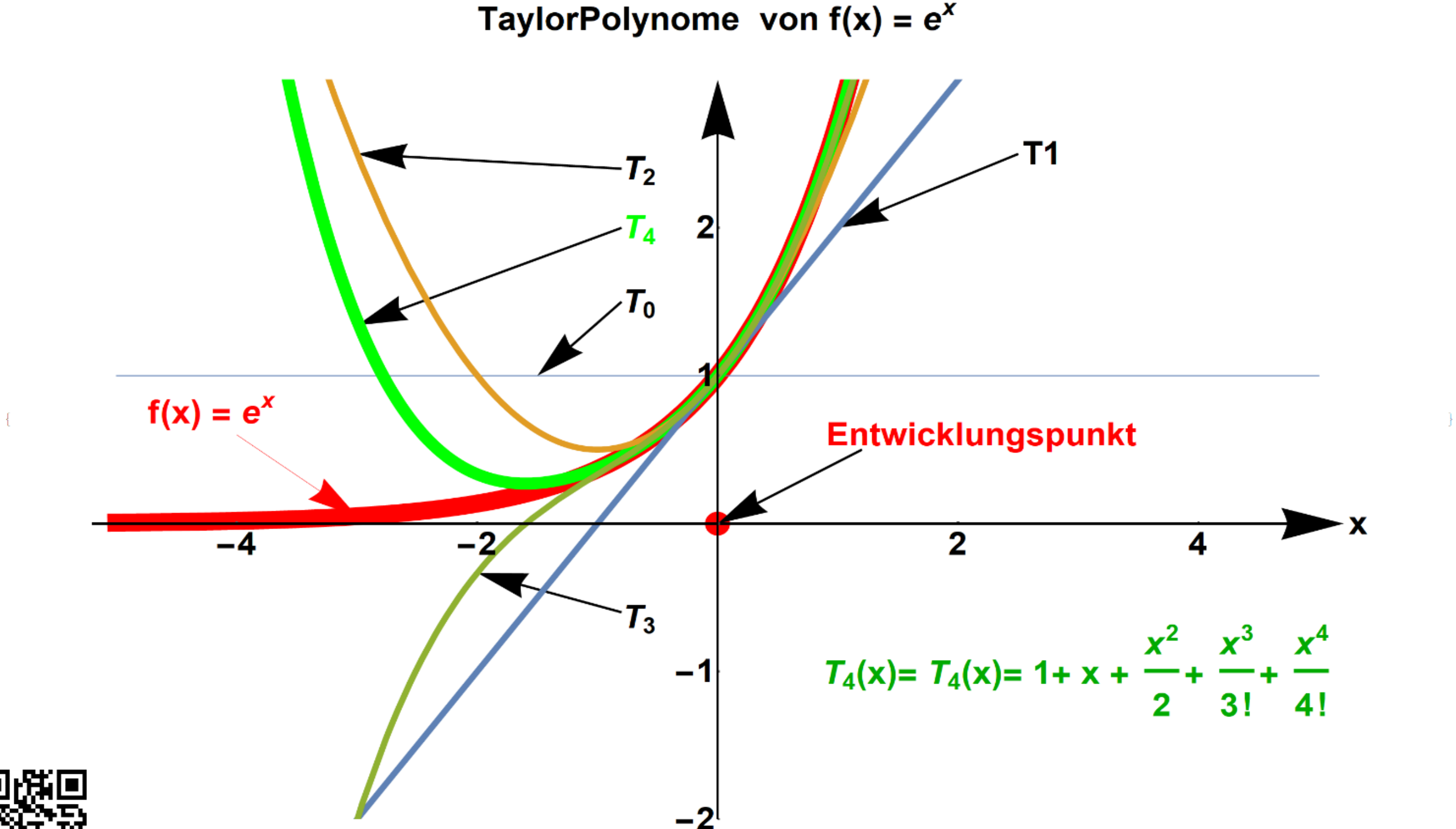


Abb. 7.4. Taylor-Polynom für $f(x) = e^x$



Taylor-Polynome für $f(x)= e^x$.

Im Video LINK werden die einzelnen Taylor-Polynome bis T_4 zusammengefügt

https://sn.pub/KZwvrj

Der Konvergenzradius ist

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k\to\infty}(k+1) = \infty,$$

also ist K= $\mathbb{R}$.

Somit dürfen wir annehmen, dass für die **Taylor-Reihe von $\boldsymbol{e^x}$** gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 7.5: $f(x) = \sin x\,, x \in \mathbb{R}$ und Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{(2k+1)}}{(2k+1)!}$$

Da die Funktion sin *x* ungerade ist, besteht die Taylor-Reihe nur aus ungeraden Polynomen (s. Abb. 7.6)

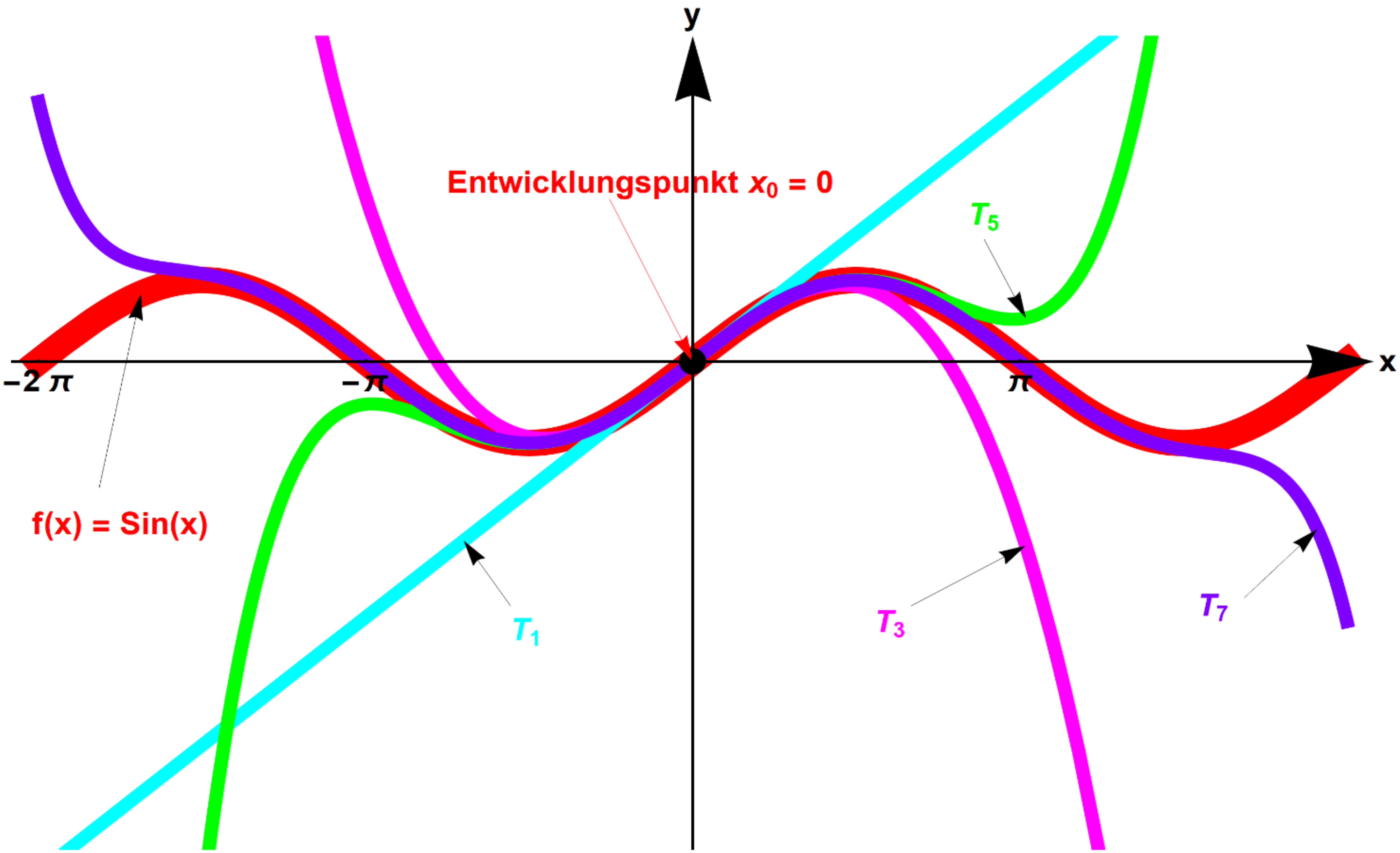


Abb. 7.6. Taylor-Polynome für $f(x) = \sin(x)$

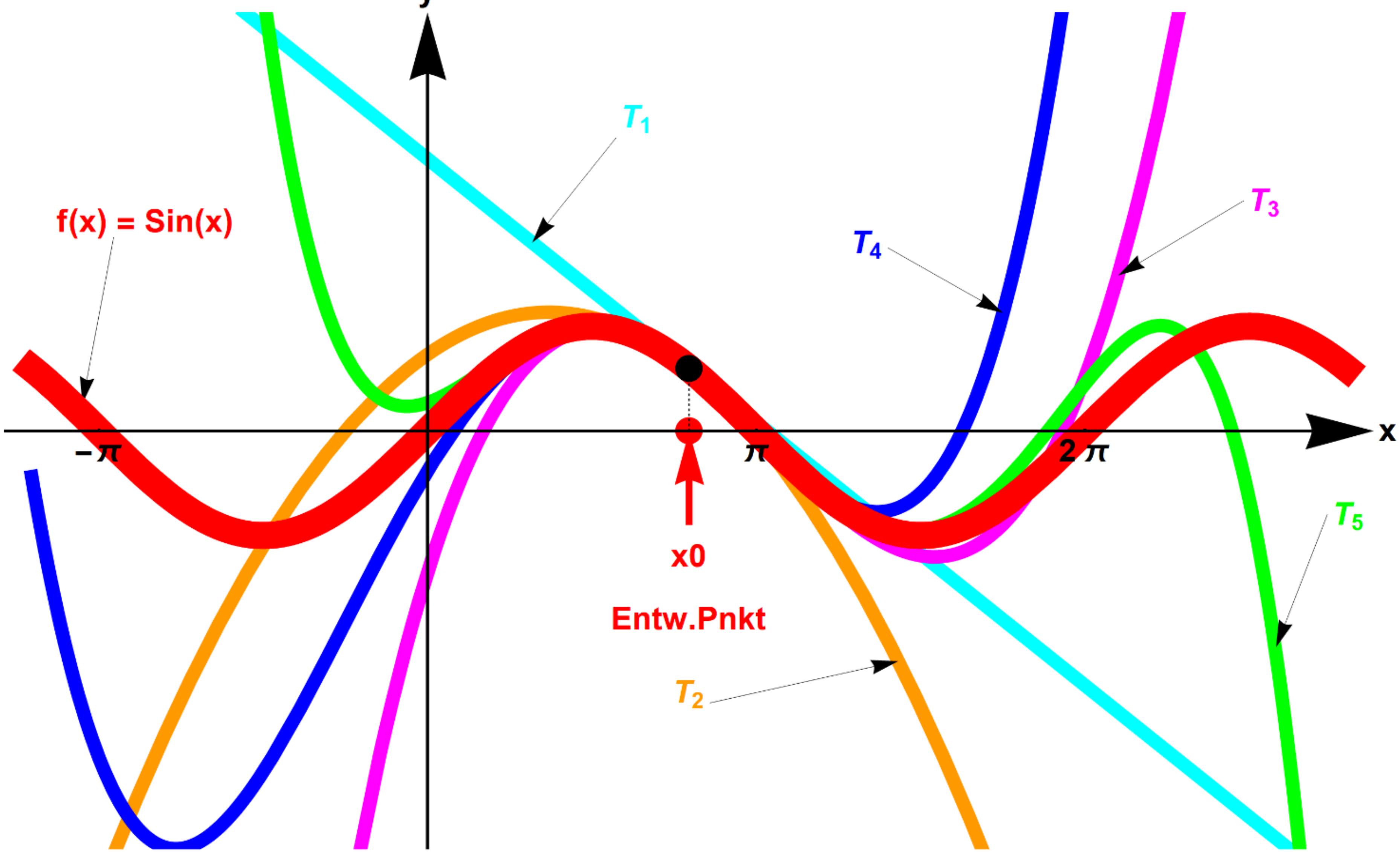


Abb. 7.7. Taylor-Polynome für $f(x) = \sin x$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 3$. Im Video LINK sieht man, wie die Taylor-Polynome sich verändern, wenn der Entwicklungspunkt verschoben wird.

https://sn.pub/kdtmEJ

Beispiel 7.7: $f(x) = \cos x\,, x \in \mathbb{R}$ und Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Da die Funktion $\cos x$ gerade ist, besteht die Taylor-Reihe nur aus geraden Polynomen (s. Abb. 7.8).

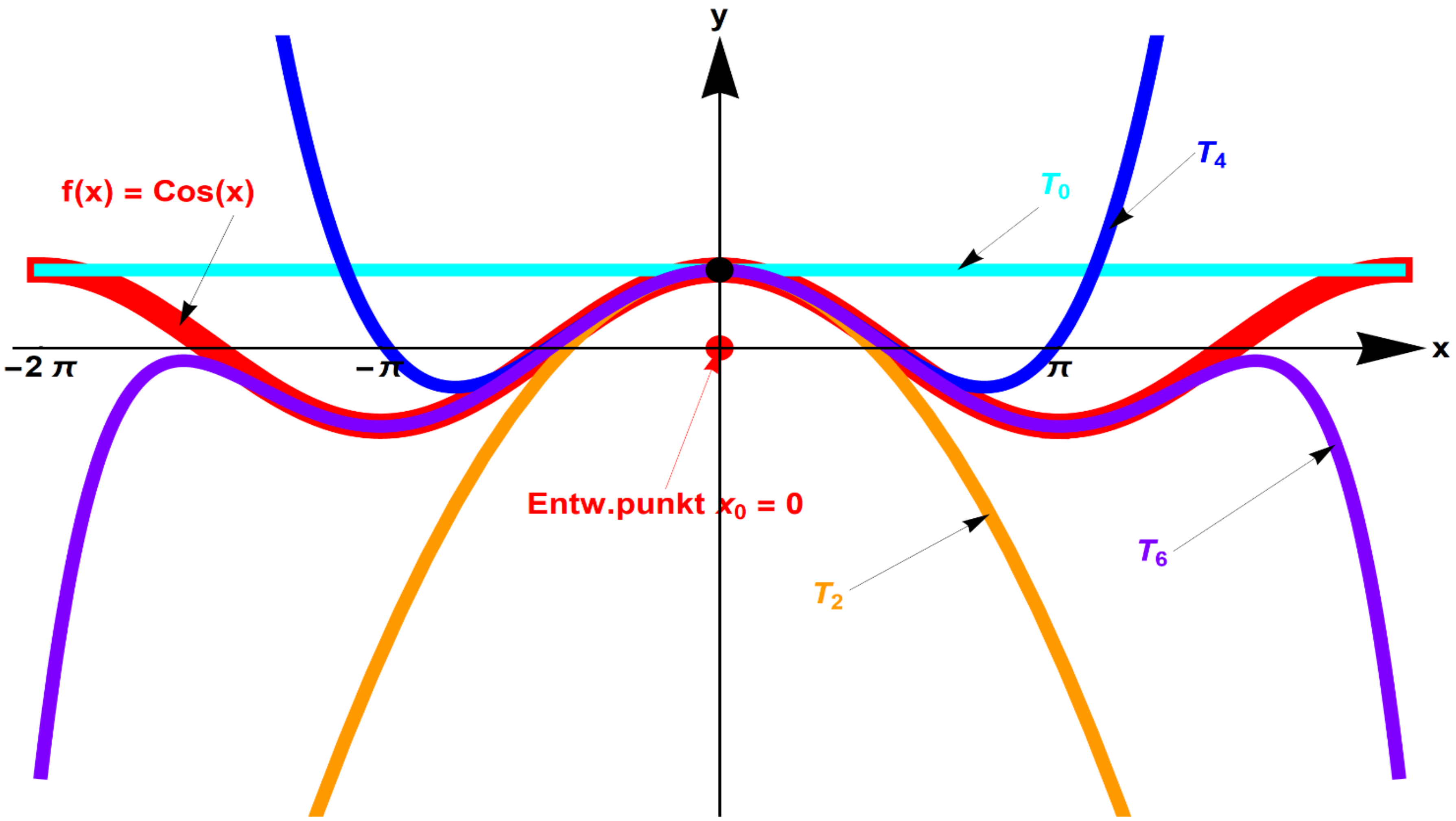


Abb. 7.8. Taylor-Polynome für cos(x)

Beispiel 7.8: $f(x) = e^{jx}, x \in \mathbb{R}$ und Entwicklungspunkt $x_0 = 0$
Dies ist eine komplexe Taylor-Reihe!

Es gilt für die imaginäre Einheit j:

$$j^2 = -1$$
$$j^3 = -j$$
$$j^4 = 1$$
$$j^5 = j$$
$$j^6 = -1$$
$$j^7 = -j$$
$$j^8 = 1$$

Dann folgt für die Taylor-Reihe der komplexen Funktion e^{jx}

$$f(x) = e^{jx}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(jx)^k}{k!}\, x^k = \; 1 + jx + j^2\, \frac{x^2}{2!} + j^3\, \frac{x^3}{3!} \; + j^4\, \frac{x^4}{4!} \; + j^5\, \frac{x^5}{5!} \; + j^6\, \frac{x^6}{6!} \; + j^7$$

$$= \; 1 + jx - \frac{x^2}{2!} - \mathrm{j}\, \frac{x^3}{3!} \; + \; \frac{x^4}{4!} \; + j\, \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} \; - \mathrm{j}\, \frac{x^7}{7!} \; +$$

$$+ \frac{x^8}{8!} \ldots \ldots$$

Nach Realteil und Imaginärteil sortiert:

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \dots\right)}_{\cos x} +$$

$$j\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \dots\right)}_{\sin x} = \cos x + \mathrm{j}\sin x$$

Daraus ergibt sich die **Eulersche Formel**:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}t} = \cos x + \mathrm{j}\sin x$$

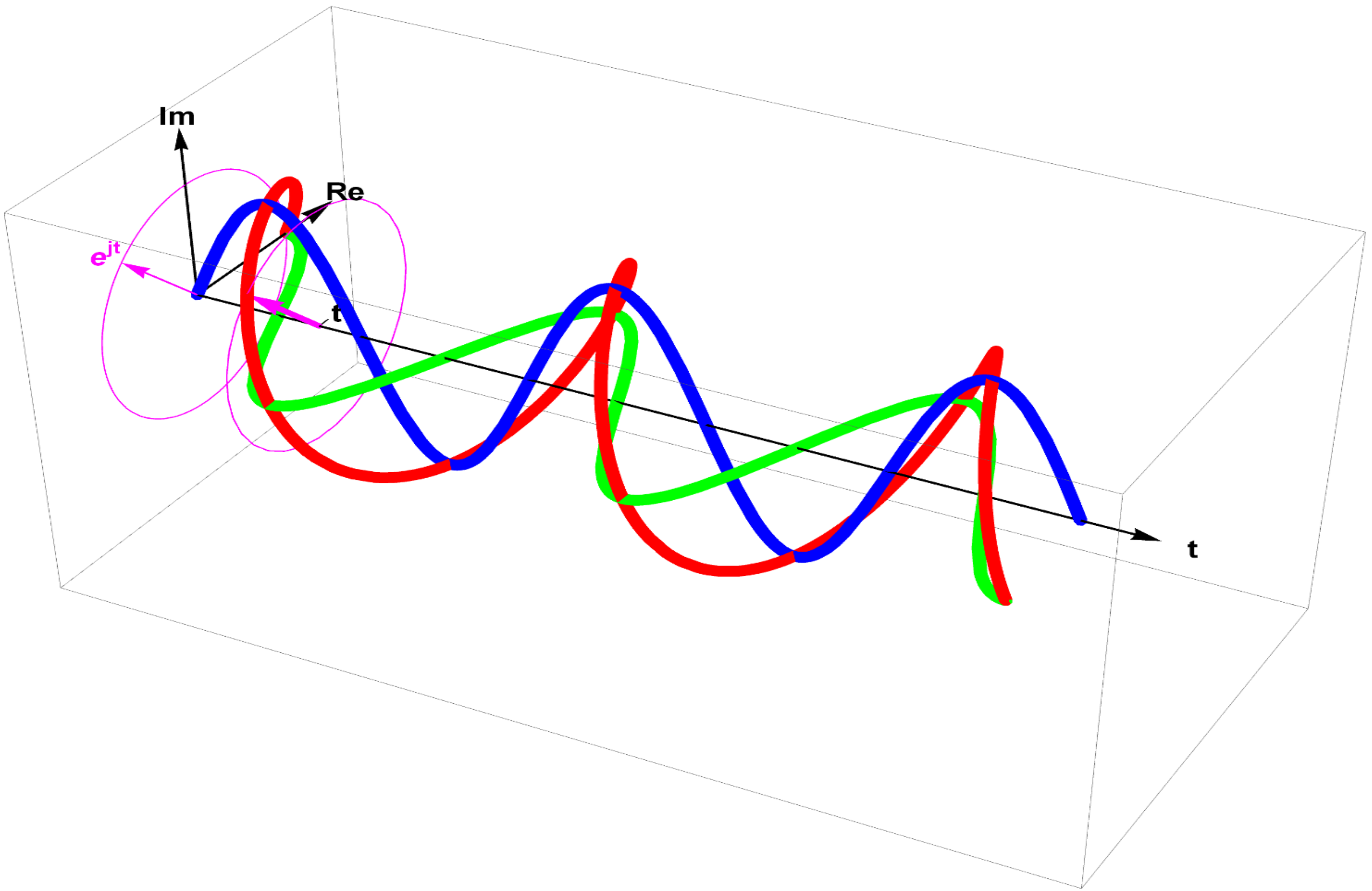


Abb. 7.9. Demonstration für die Eulersche Formel $e^{jx} = \cos x + \, j \sin x$ Video LINK 7.2. zu Abb. 7.9

https://sn.pub/SZEh6c

Fehlerabschätzungen

Die Taylor-Polynome

$$T_n(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} a_k \, (x - x_0)^k$$

sind Approximationen der Taylor-Reihe

$$T(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, (x - x_0)^k \; = \; T_n\,(x) + \mathrm{R}\,_n(x)\,.$$

Das heißt, es gibt für jedes n einen **Approximationsfehler**:

$$\mathrm{R}_n(x) := T(x) - T_n(x)$$

Dieses $\mathrm{R}_n(x)$ heißt **Restglied** und kann abgeschätzt werden durch die

Lagrange-Restgliedformel

$$\mathrm{R}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)} \text{ mit } t \text{ zwischen } x \text{ und } x_0.$$

t ist nicht bekannt!

Beispiel 7.10: Restglied R_1 und dessen Abschätzungen mit der Lagrange-Formel der Funktion $f(x) = e^x$ an der Stelle $x = 2$ mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$

Abschätzung mit Lagrange-Formel:

$$|\mathrm{R}_1(2)| \leq \max_{t,x \in [0,2]} \left\{ \left| \frac{e^t}{(1+1)!} \right| |x|^{(1+1)} \right\} \leq \frac{e^2}{2!}\, 2^2 = \frac{e^2}{2} 4 = 14{,}78 = L_1$$

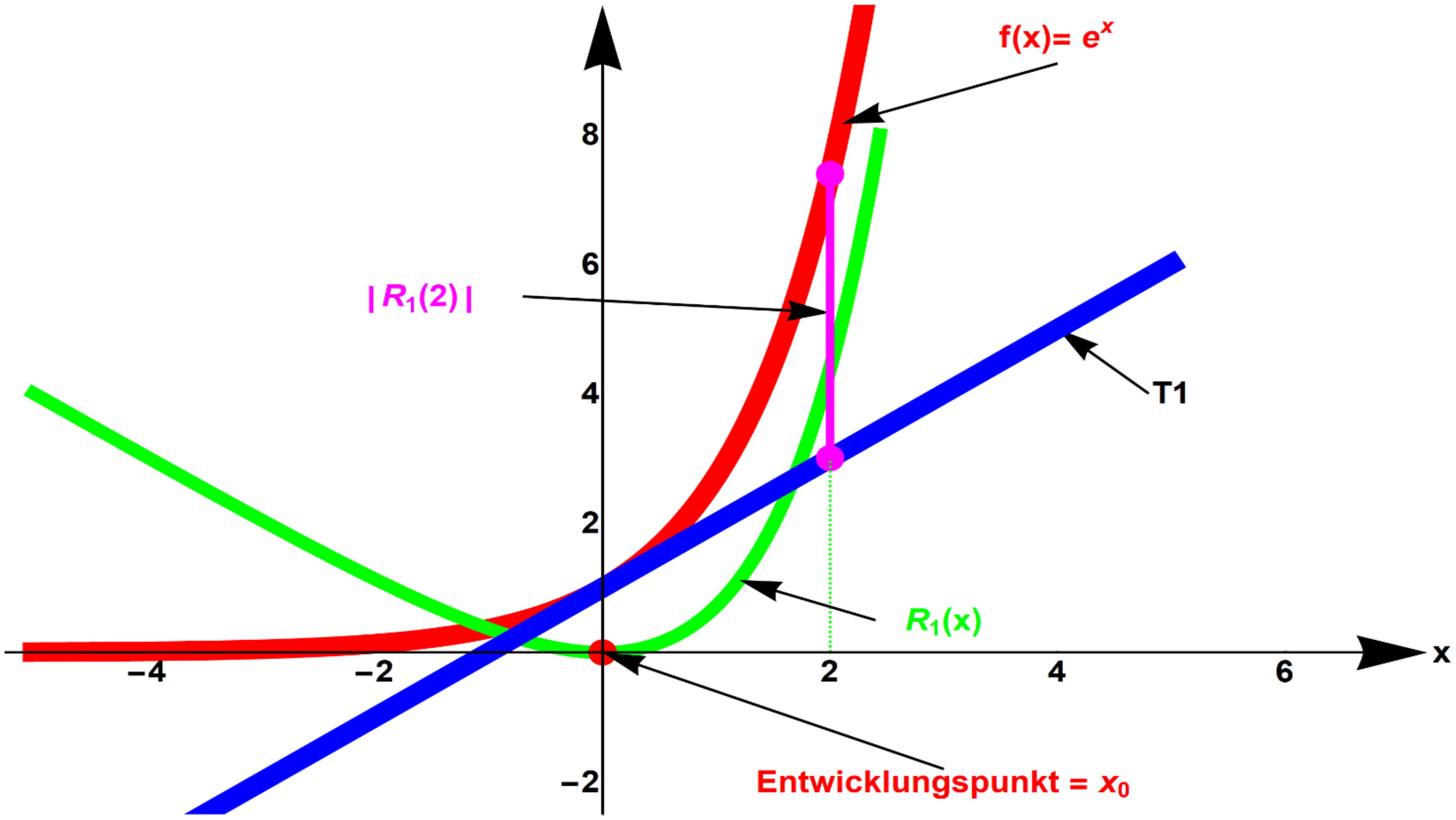


Abb. 7.11. Linearer Fehler von $f(x) = e^x$ an der Stelle $x = 2$