Differentialrechnung im Mehrdimensionalen

5. Teil

Relative Extremwerte **mit** Nebenbedingungen

- **Problem** :

  (anschaulich): Hoch- und Tiefpunkten entlang eines Wanderweges in einer hügeligen Landschaft.

  (abstrakt)Extremwerte, bei denen man die Suche nach dem gewünschten Wert durch zusätzliche Bedingungen (sogenannte Nebenbedingungen) einschränkt.

- **Anwendungen:**

  Optimierungsprobleme wie Lagerhaltung,Preis-,Energie-,Wegoptimierung unter Bedingungen, Videocodierung

- **Lösung:**

  Multiplikatorverfahren von Lagrange liefert notwendige Bedingungen.

Mathematische Formulierung :

- **Gegeben:** sei eine Funktion $z = f(x, y)$ und eine Kurve in impliziter Form $\varphi(x, y) = 0$ in der *xy*- Ebene.

- **Gesucht:** relative Maxima und Minima von $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$.

1.Schritt: Bilde die Hilfsfunktion (Lagrange HilfsFunktion).

$$L(x, y, \lambda) \coloneqq f(x, y) + \lambda\, \varphi(x, y)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ heißt **Lagrange-Multiplikator** (Hilfsparameter)

2.Schritt: Suche stationäre Punkte in $L(x, y, \lambda)$ (d.h. setze die partiellen Ableitungen = 0):

$$L_x(x, y, \lambda) = f_x(x, y) + \lambda\, \varphi_x(x, y) = 0$$

$$L_y(x, y, \lambda) = f_y(x, y) + \lambda\, \varphi_y(x, y) = 0$$

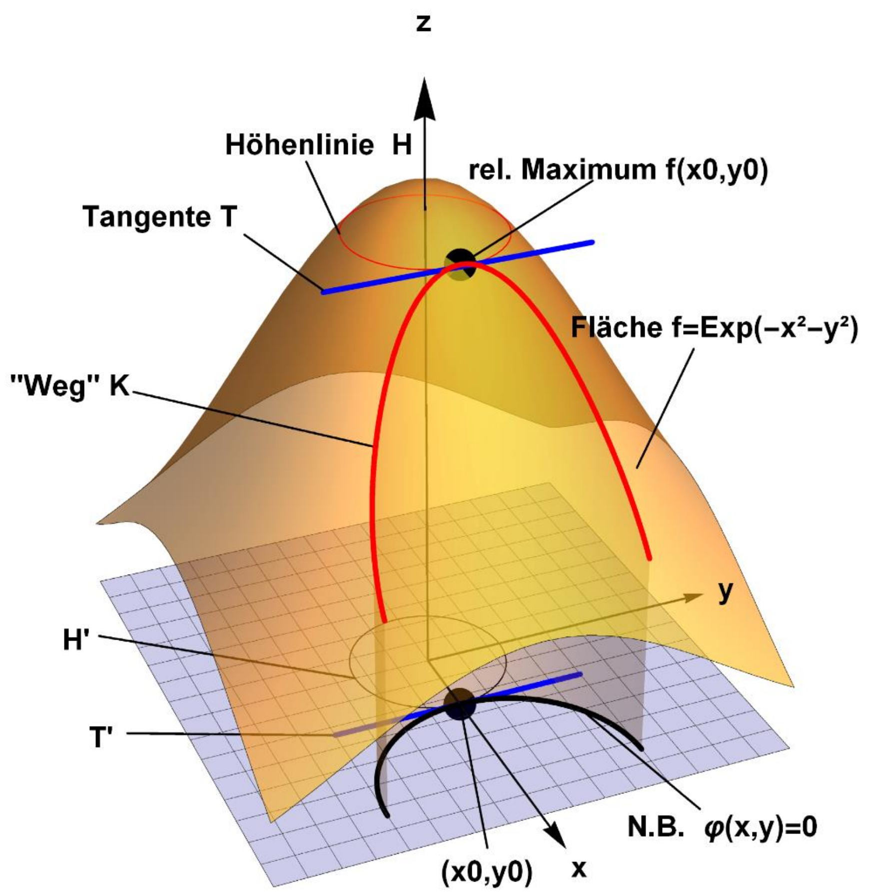
$$L_\lambda(x, y, \lambda) = \varphi(x, y) = 0 \qquad \text{(Nebenbedingung)}$$

Die Lösung (x_0, y_0, λ_0) dieses Systems liefert stationäre Punkte (x_0, y_0) (Lage der mögliche Hoch- oder Tiefpunkte).
λ_0 ist nicht nötig.

3.Schritt: Berechnung von $z_0 = f(x_0, y_0)$ ergibt dann die (möglichen) Hoch- und Tiefpunkte (x_0, y_0, z_0).

Keine Aussage welcher Art die möglichen Extremwerte (x_0, y_0, z_0) sind! Dies muss sich aus dem Kontext ergeben.

Gaußsche Glockenfunktion mit „Weg“



https://drive.google.com/file/d/1_wM-gnl7IFkMngpPkxNNXzous5qSBCtx/view?usp=sharing

Beispiel 16.9:

Bestimme den Extremwert von

$$z = f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$$

unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x, y) = 2x - y + 1 = 0.$$

1. **Schritt:** Bilde die Lagrangesche Hilfsfunktion:

$$L(x, y, \lambda) = 1 - (x^2 + y^2) + \lambda(2x - y + 1)$$

2. Schritt: Setze die partiellen Ableitungen von
$L(x, y, \lambda) = 1 - (x^2 + y^2) + \lambda(2x - y + 1)$ gleich 0:

(1) $$L_x(x, y, \lambda) = -2x + 2\lambda = 0$$

(2) $$L_y(x, y, \lambda) = -2y - \lambda = 0$$

(3) $$L_\lambda(x, y, \lambda), y, \lambda) = 2x - y + 1 = 0$$

3. Schritt: Löse das Gleichungssystem (1), (2), (3).

Aus (1) und (2) folgt: $x = \lambda, -2y = \lambda$ und damit $x = -2y$.

Einsetzen in (3) ergibt: $2(-2y) - y = -5y = -1$.

Daraus folgt $y = \frac{1}{5}$ und $x = -\frac{2}{5}$.

Also ist $(x, y) = (-\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ ein stationärer Punkt.

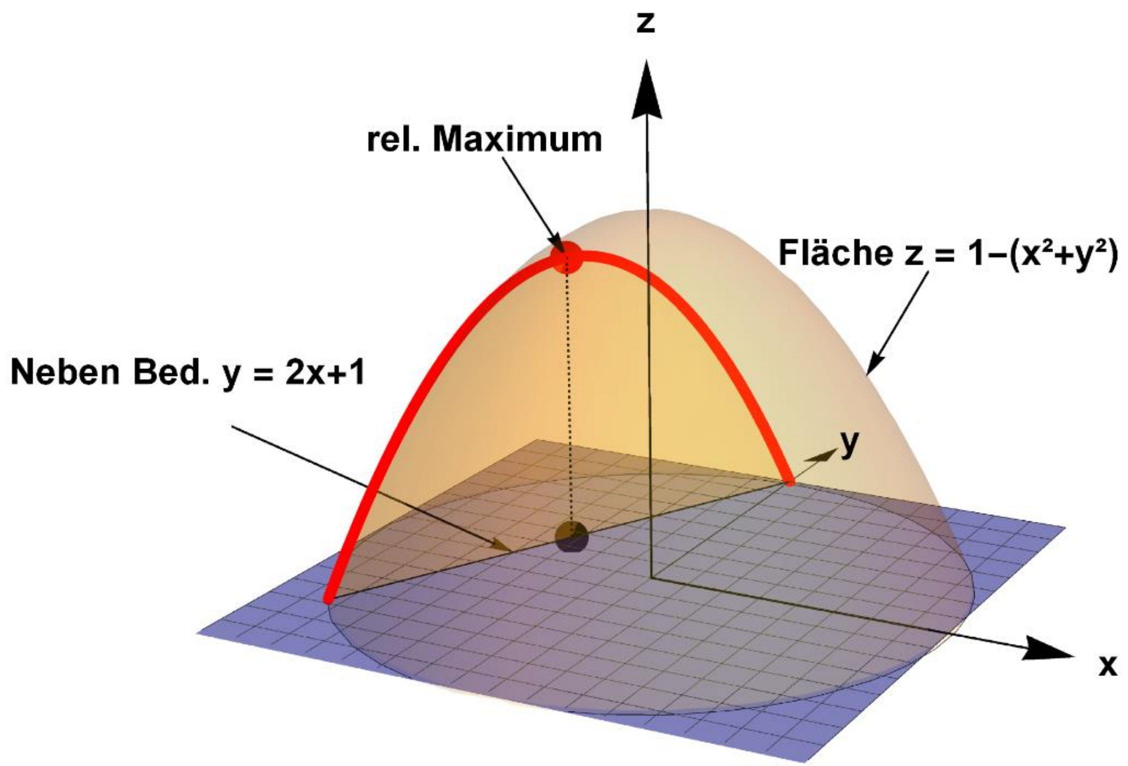
4. Schritt: Bestimme den Typ des stationären Punktes und den Funktionswert.

Da die Funktion $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$ ein nach unten geöffnetes Paraboloid ist, ist an der Stelle $(x, y) = (-\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ ein Maximum mit dem Funktionswert

$$z = f(x, y) = 1 - (\frac{4}{25} + \frac{1}{25}) = \frac{4}{5}.$$

Also ist der Punkt $(x, y, z) = (-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5})$ ein Maximum von $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ (s. Abb.).

Paraboloid mit Weg



Beispiel 16.10:

Bestimme den Extremwert von

$$z = f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$$

unter der Nebenbedingung

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 - \tfrac{1}{4} = 0.$$

1. **Schritt:** Bilde die Lagrangesche Hilfsfunktion:

$$L(x, y, \lambda) = e^{-(x^2 + y^2)} + \lambda \left((x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 - \tfrac{1}{4} \right)$$

2. Schritt: Setze die partiellen Ableitungen von $L(x, y, \lambda) = e^{-(x^2+y^2)} + \lambda\left((x-\frac{1}{2})^2 + y^2 - \frac{1}{4}\right)$ gleich 0:

(1) $$L_x(x, y, \lambda) = -2xe^{-(x^2+y^2)} + 2\lambda\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

(2) $$L_y(x, y, \lambda) = -2ye^{-(x^2+y^2)} + 2\lambda y = 0$$

(3) $$L_\lambda(x, y, \lambda) = (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0$$ (NB)

3. Schritt: Löse das Gleichungssystem (1), (2), (3).

Aus (2) folgt: $2y(-e^{-(x^2+y^2)} - \lambda) = 0$ und damit gibt es zwei Fälle:

1. Fall: λ $=e^{-(x^2+y^2)}$

Wenn man dieses λ in (1) einsetzt, erhält man

$$-2xe^{-(x^2+y^2)} + 2e^{-(x^2+y^2)}(x - \frac{1}{2}) = 0.$$

Daraus folgt $\frac{1}{2}e^{-(x^2+y^2)} = 0$. Dies ist aber **nicht möglich**, da $\frac{1}{2}e^{-(x^2+y^2)} > 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Somit bleibt der

2. Fall: *y* = 0

y = 0 einsetzen in (3) ergibt $(x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

Daraus folgen zwei Lösungen. $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$. Also gibt es zwei stationäre Punkte:

$(x_1, y) = (0{,}0)$ und $(x_2, y) = (1{,}0)$.

4. Schritt: Bestimme den Typ des stationären Punktes und die Funktionswerte.

Die Funktion $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$ ist eine Gaußsche Glockenfunktion mit dem Maximum an der Stelle (0,0).

Damit ist klar, dass an der Stelle $(x_1, y) = (0, 0)$ ein Maximum und an der Stelle $(x_2, y) = (1, 0)$ ein Minimum unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ liegt.

Die Funktionswerte sind

$$z_1 = f(0{,}0) = e^{-0} = 1$$
$$z_2 = f(1{,}0) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

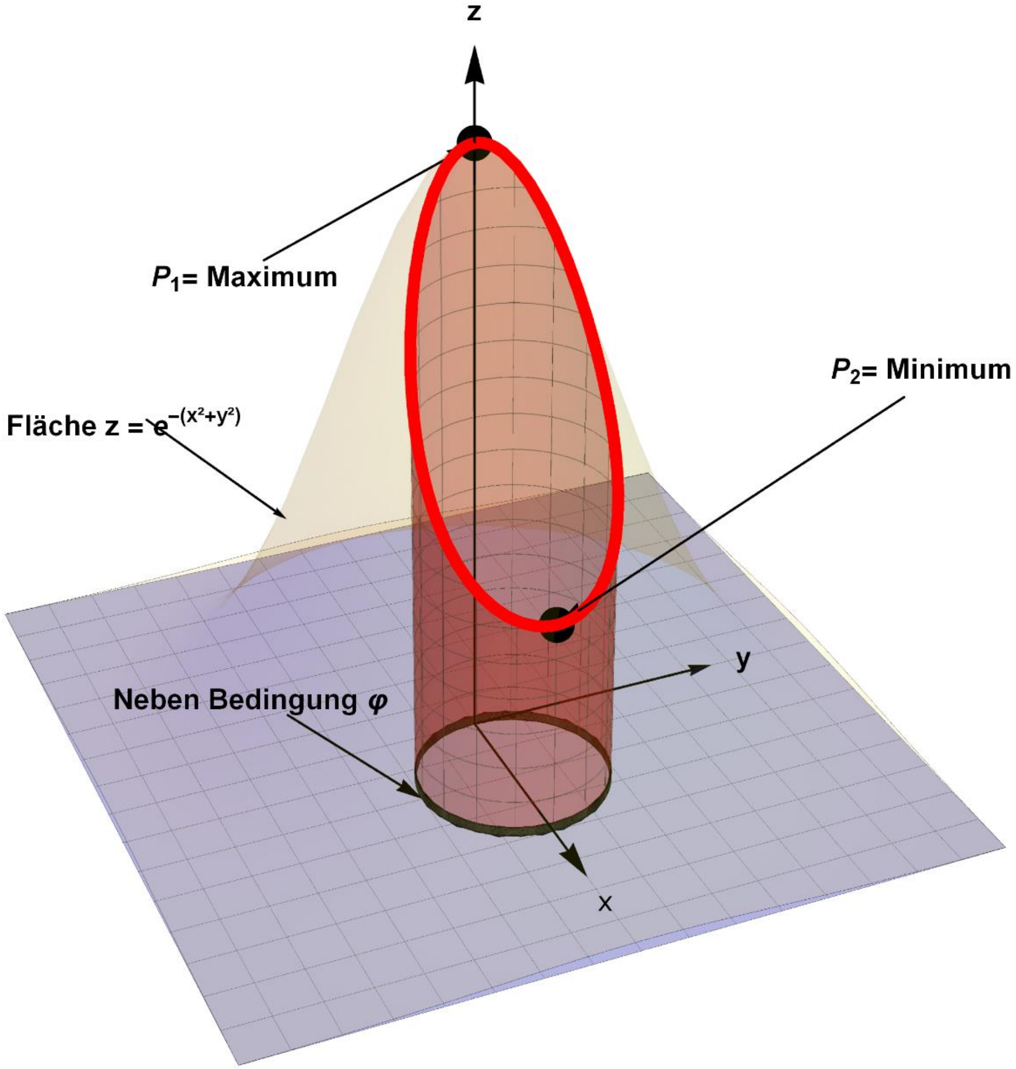
Also ist der Punkt $P_1 = (x_1, y_1, z_1) = 0,\, 0{,}1)$ ein Maximum von

$f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$

und der Punkt$P_2 = (x_2, y_2, z_2) = (1{,}0, \frac{1}{e})$ ein Minimum von

$f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ (s. Abb.).

Gaußsche Glockenfunktion mit kreisförmiger NB
2 Extremwerte



Beispiel 16.11:

Bestimme den Extremwert von

$$z = f(x, y) = (x^2 - y^2) + 1$$

unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

1. **Schritt:** Bilde die Lagrangesche Hilfsfunktion:

$$L(x, y, \lambda) = (x^2 - y^2) + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

2. Schritt: Setze die partiellen Ableitungen von

$L(x, y, \lambda) = (x^2 - y^2) + 1 + \lambda(x^2 + \ y^2 - 1)$ gleich 0:

$$(1) \qquad L_x(x, y, \lambda) = 2x + 2\lambda x = 0$$

$$(2) \qquad L_y(x, y, \lambda) = -2y + 2\lambda y = 0$$

$$(3) \qquad L_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + \ y^2 - 1 = 0$$

3. Schritt: Löse das Gleichungssystem (1), (2), (3).

Aus (1) folgt
Fall 1: $x = 0$
Einsetzen in (3) ergibt: $y = \pm 1$.
Fall 2 $: \lambda = -1)$.
Daraus folgt aus (2) $y = 0$
Einsetzen $y = 0$ in (3) ergibt: $x = \pm 1$.

Wir haben somit vier „stationäre" Punkte:

$(x_1, y_1) = (0,1), (x_2, y_2) = (0, -1), (x_3, y_3) = (1,0), (x_4, y_4) = (-1,0).$

4. Schritt: Bestimme den Typ des stationären Punktes und die Funktionswerte.

Die Funktionswerte sind:

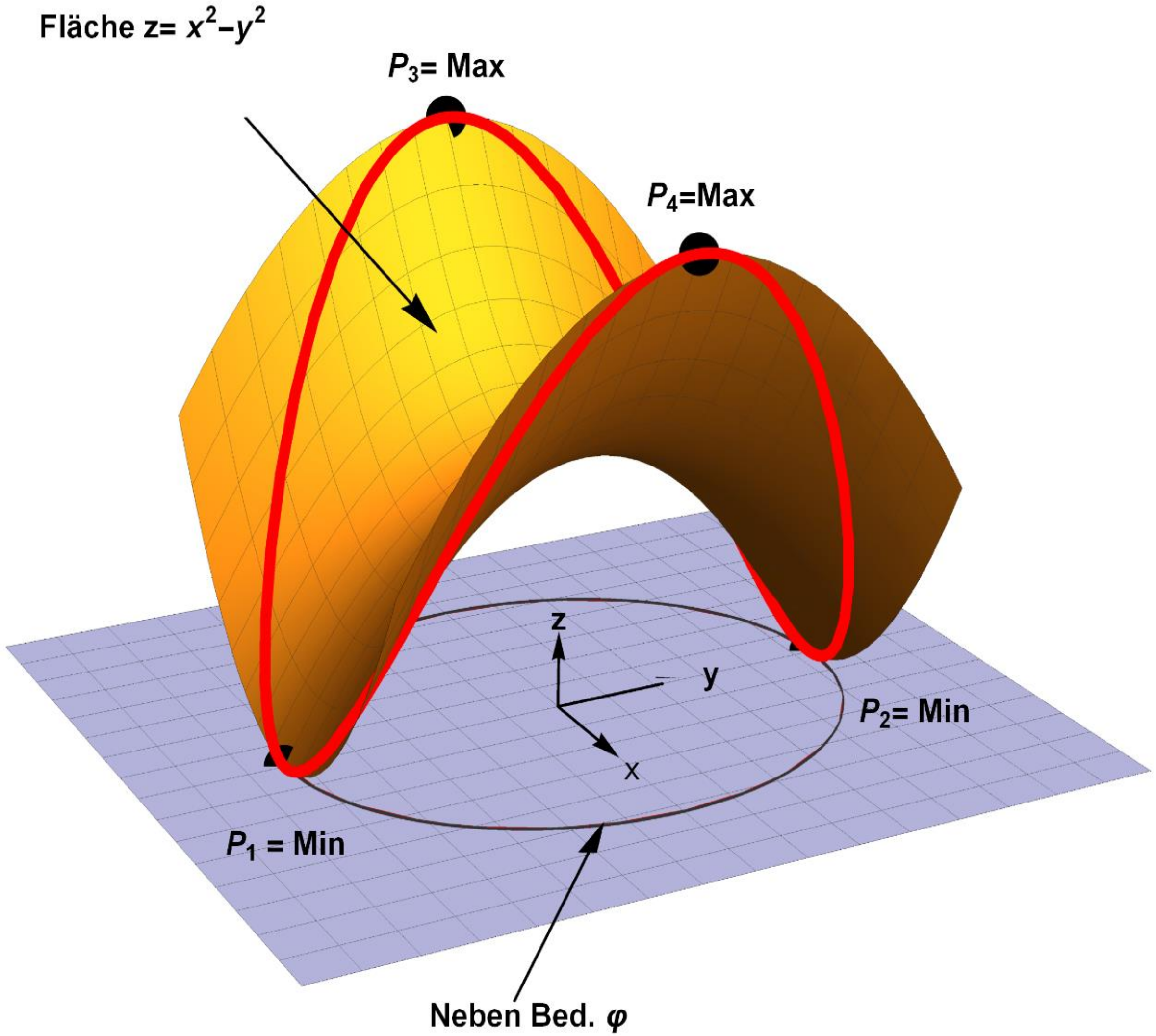
$$z_1 = f(0,1) = 0$$
$$z_2 = f(0,-1) = 0$$
$$z_3 = f(1,0) = 2$$
$$z_4 = f(1,0) = 2$$

Aus der Geometrie der Sattelfläche und der Nebenbedingung (s. Abb.) erkennt man leicht, dass

$P_1 = \left(x_1, y_{1,} z_1\right) = (0, 1,0)$ und $P_2 = (x_2, y_2, z_2) = (0, -1,0)$ Minima und
$P_3 = (x_3, y_3, z_3) = (1, 0, 2)$ und $P_4 = (x_4, y_4, z_4) = (-1, 0, 2)$ Maxima

von f unter der Nebenbedingung φ sind (s. Abb.).

Sattelfunktion mit kreisförmiger NB
4 Extremwerte



https://drive.google.com/file/d/1dneNQx4I1CymqI8I2D7HWhHgd-QaWGBx/view?usp=sharing

Beispiel 16.12:

Bestimme den Extremwert von

$$z = f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 4$$

unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x, y) = x^2 - y - 2 = 0.$$

1. **Schritt:** Bilde die Lagrangesche Hilfsfunktion:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + 3y^2 + 4 + \lambda(x^2 - y - 2)$$

2. Schritt: Setze die partiellen Ableitungen von $L(x, y, \lambda) = x^2 + 3y^2 + 4 + \lambda\left(x^2 - y - 2\right)$ gleich 0:

(1) $L_x(x, y, \lambda) = 2x + 2\lambda x = 0$

(2) $L_y(x, y, \lambda) = 6y - \lambda = 0$

(3) $L_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 - y - 2 = 0$

3. Schritt: Löse das Gleichungssystem (1), (2), (3).

Analoge Rechnungen wie in Beispiel oben ergeben drei stationäre Punkte:

$$(x_1, y_1) = (0,2),$$

$$(x_2, y_2) = \left(-\sqrt{\frac{11}{6}}, -\frac{1}{6}\right),$$

$$(x_3, y_3) = \left(\sqrt{\frac{11}{6}}, -\frac{1}{6}\right)$$

4. Schritt: Die Funktionswerte sind:

$$z_1 = 16$$
$$z_2 = \frac{71}{12}$$
$$z_3 = \frac{71}{12}$$

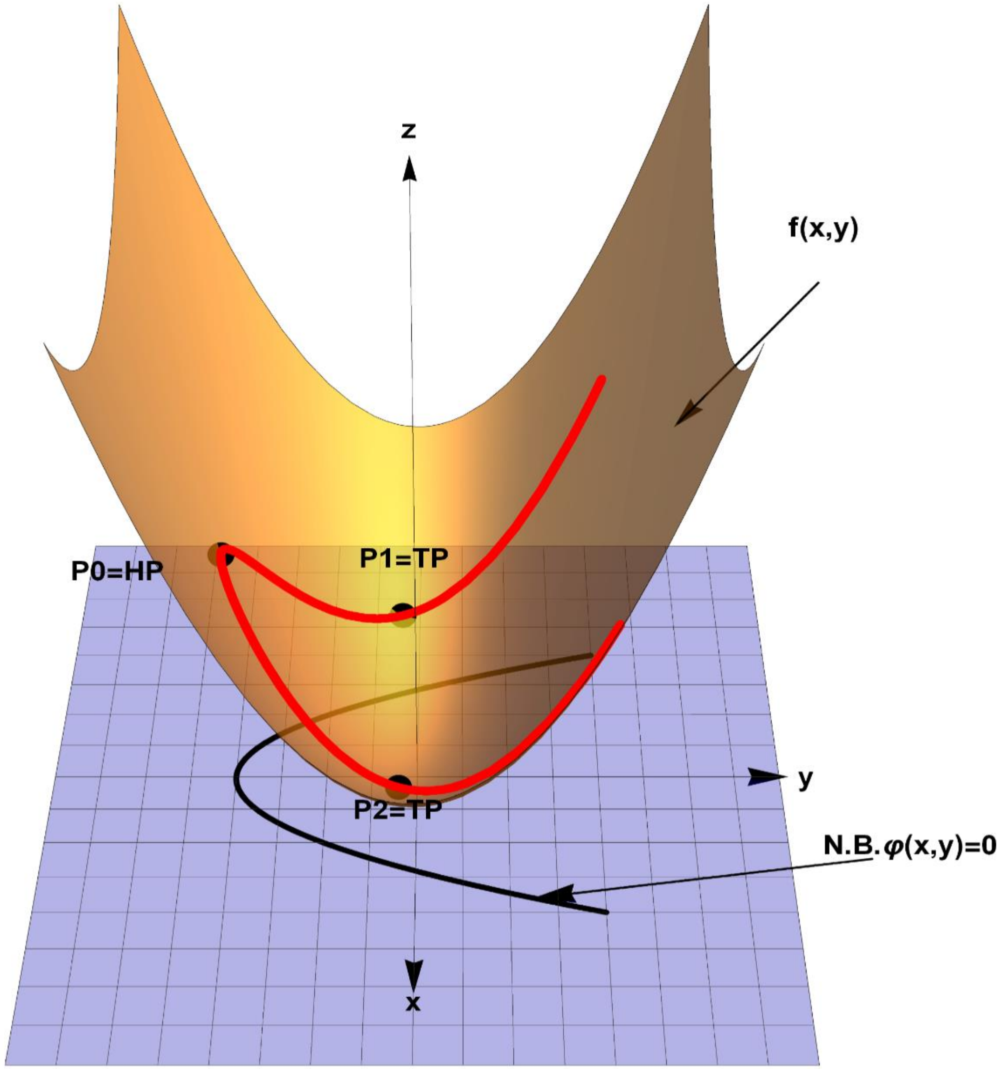
Aus der Geometrie der Paraboloid Fläche und der Nebenbedingung $(\mathrm{s.\,Abb.})$ erkennt man leicht, dass

$$P_0 = (0,2,16)$$ ein Maximum ist und

$$P_1 = \left(-\sqrt{\frac{11}{6}}, -\frac{1}{6}, \frac{71}{12}\right)$$ und $$P_2 = \left(\sqrt{\frac{11}{6}}, -\frac{1}{6}, \frac{71}{12}\right)$$ Minima

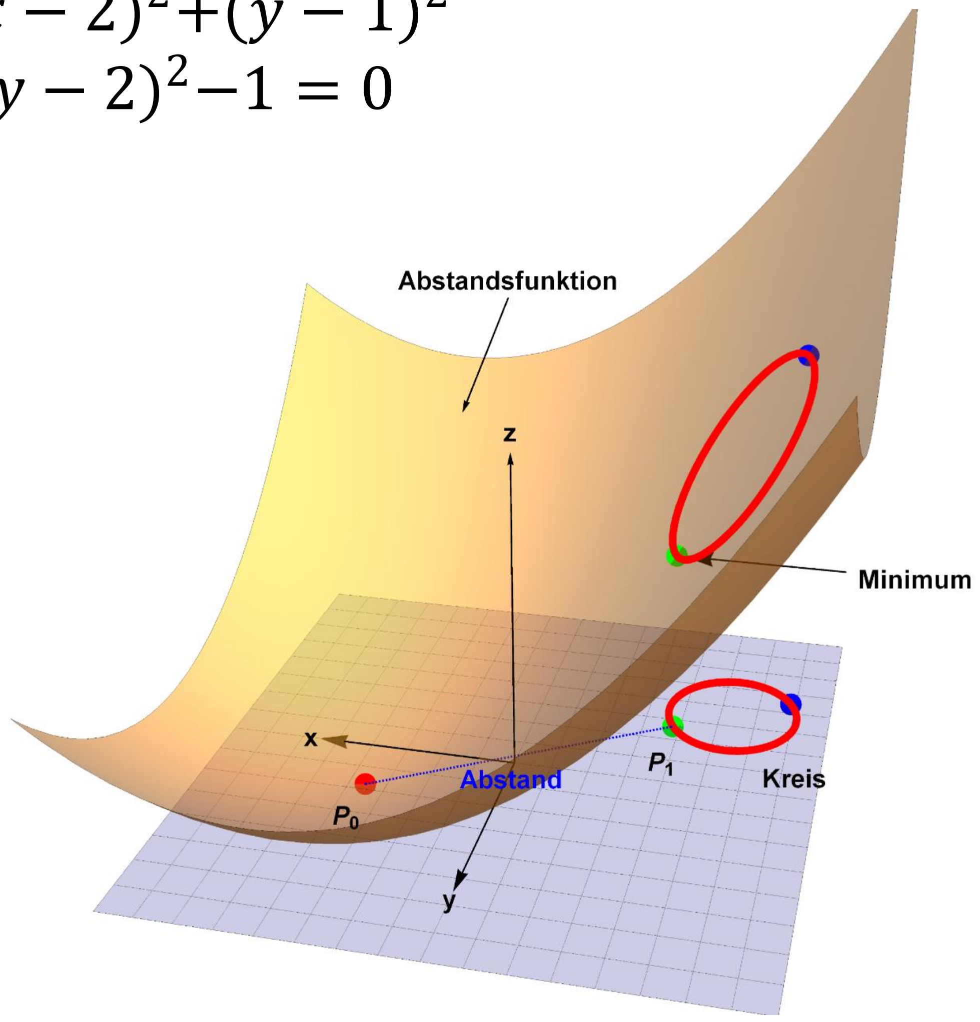
von f unter der Nebenbedingung φ sind (s. Abb.).

Paraboloid mit Parabel als NB
3 Extremwerte



Abstandsfunktion eines Punktes vom Kreis als NB
2 Extremwerte

$$f(x,y) = (a(x,y))^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$$
$$\varphi(x,y) = (x-3)^2 + (y-2)^2 - 1 = 0$$



https://drive.google.com/file/d/1kK1lyz4hCyTAWUz89IleYq3Nvif9iHn8/view?usp=sharing

Fliegender Teppich mit Ellipse als als NB
6 Extremwerte