Differentialgleichungen
9. Teil

Nicht lineare Differentialgleichungen

Klassisches Problem: mathematisches Pendel

Die Differentialgleichung vereinfacht:

$$\ddot{y}(t) + {\omega_0}^2 \sin\big(y(t)\big) = 0 \quad \text{ist 2. Ordnung } \textbf{nicht} \text{ linear}$$

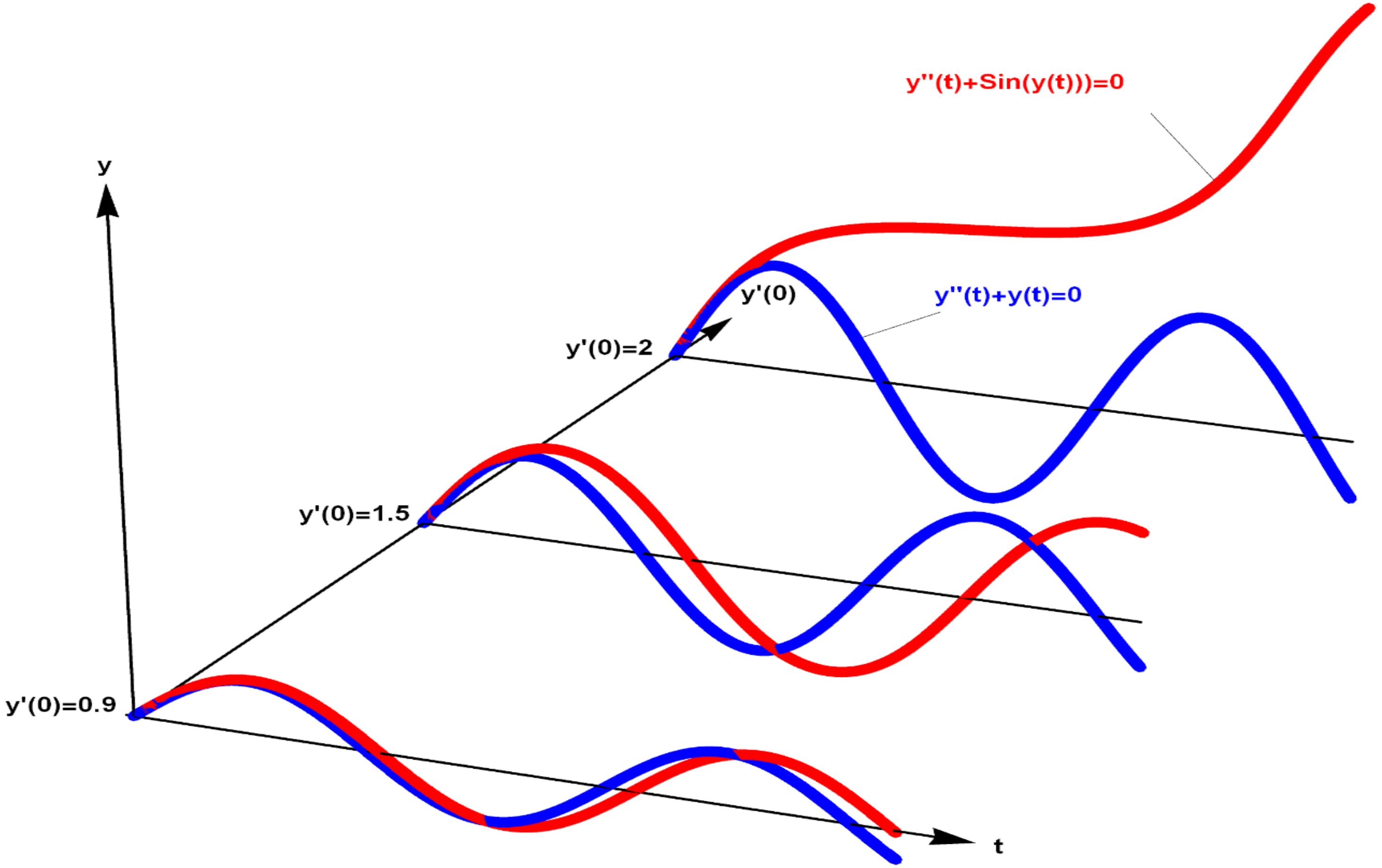
Sie ist nicht analytisch lösbar (nur numerisch), aber

Die **linearisierte** Differentialgleichung mit sin(y) ~ y

$$\ddot{y}(t) + {\omega_0}^2 y(t) = 0 \quad \text{ist 2. Ordnung linear}$$

ist lösbar .

Vergleich: nichtlineare vs. lineare Differentialgleichung mit verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten



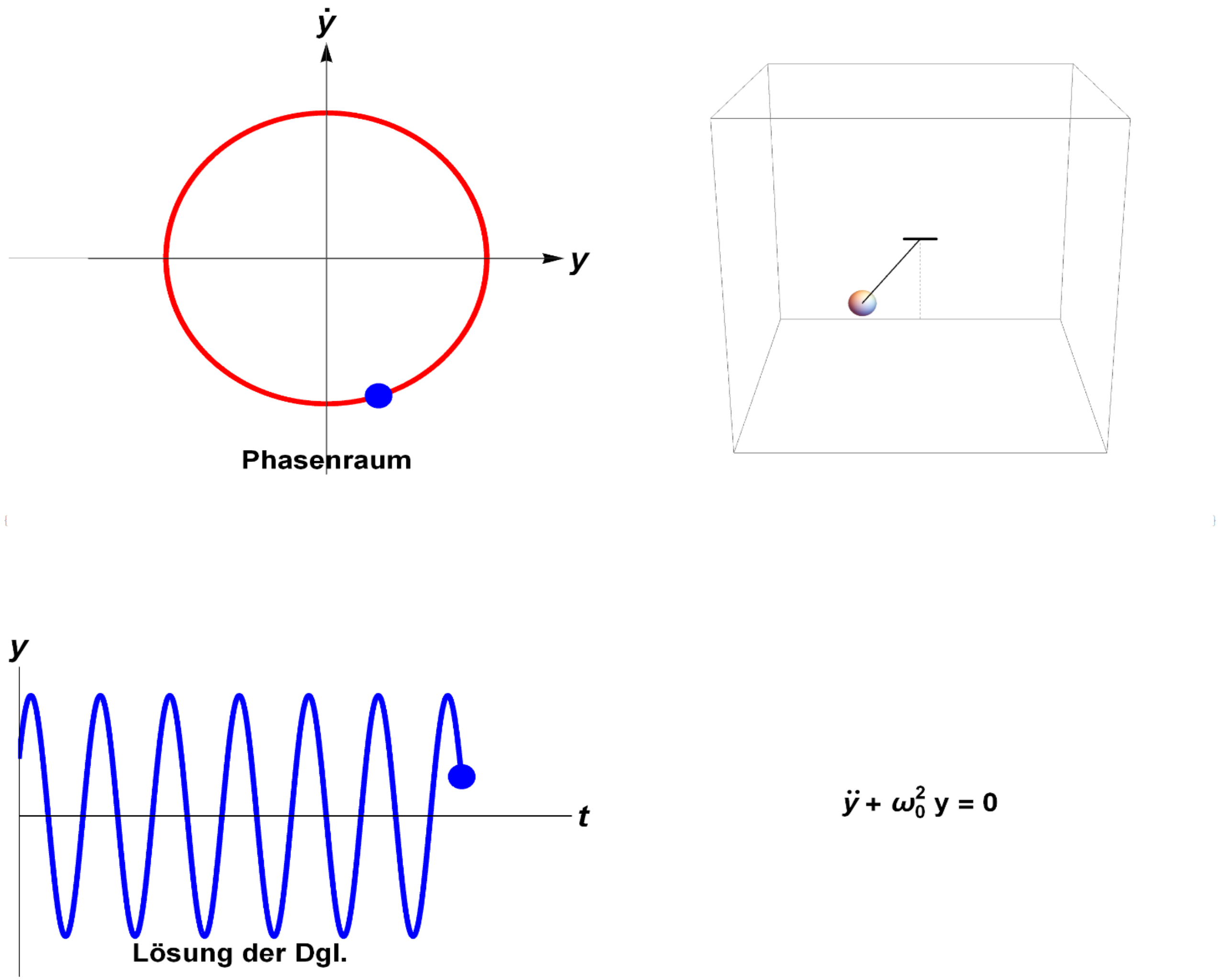
Betrachte die Lineare DGL

$$\ddot{y}(t) + {\omega_0}^2 y(t) = 0$$

$y(t)$ ist dabei die Winkelvariable und ω_0 die Frequenz des freien ungedämpften Systems. Eine Lösung dieser homogenen Differentialgleichung ist

$$y(t) = \sin(\omega_0 t)\,.$$

Wenn man die Winkelgeschwindigkeit $\dot{y}$ über der Winkelvariablen y aufträgt, erhält man die sogenannte Phasenraumdarstellung (s. Abb.).



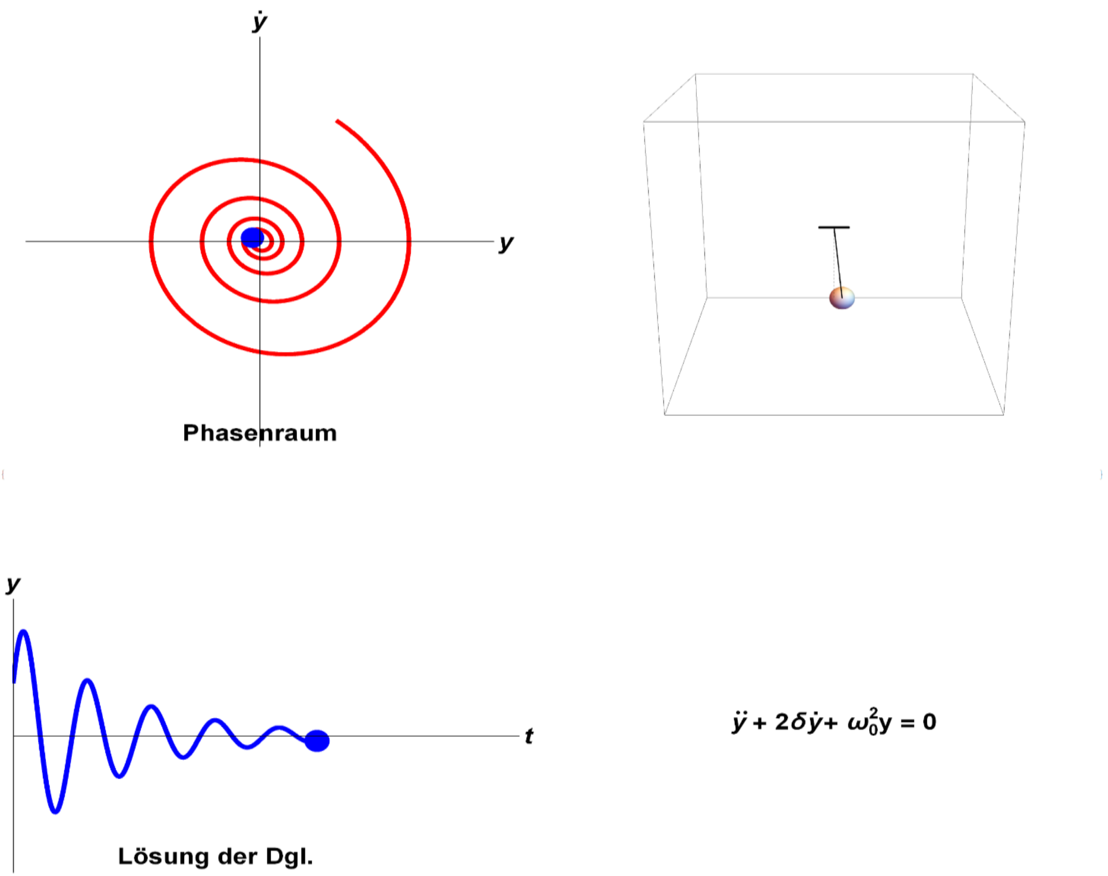
Lösung und Phasenraum der homogenen linearen Differentialgleichung ohne Dämpfung Video LINK zur Abb

https://drive.google.com/file/d/15RKq91TBu2Lkd4Q7d4gvT1I0yuyyJ1Z3/view?usp=sharing

Wenn man nun bei diesem linearen Pendelsystem Dämpfung einbezieht, entsteht die lineare Differentialgleichung des freien **gedämpften** Systems

$$\ddot{y}(t) + 2\delta\dot{y}(t) + {\omega_0}^2 y(t) = \ 0$$

mit der abklingenden Lösung (s. Kap. 13.4.1, Bilderbuch)



Lösung und Phasenraum der gedämpften homogenen linearen Differentialgleichung .
Video LINK zur Abb
https://drive.google.com/file/d/1zznxpvs0N_1Qt7r2MW-8K7mu9i7dgn1J/view?usp=sharing

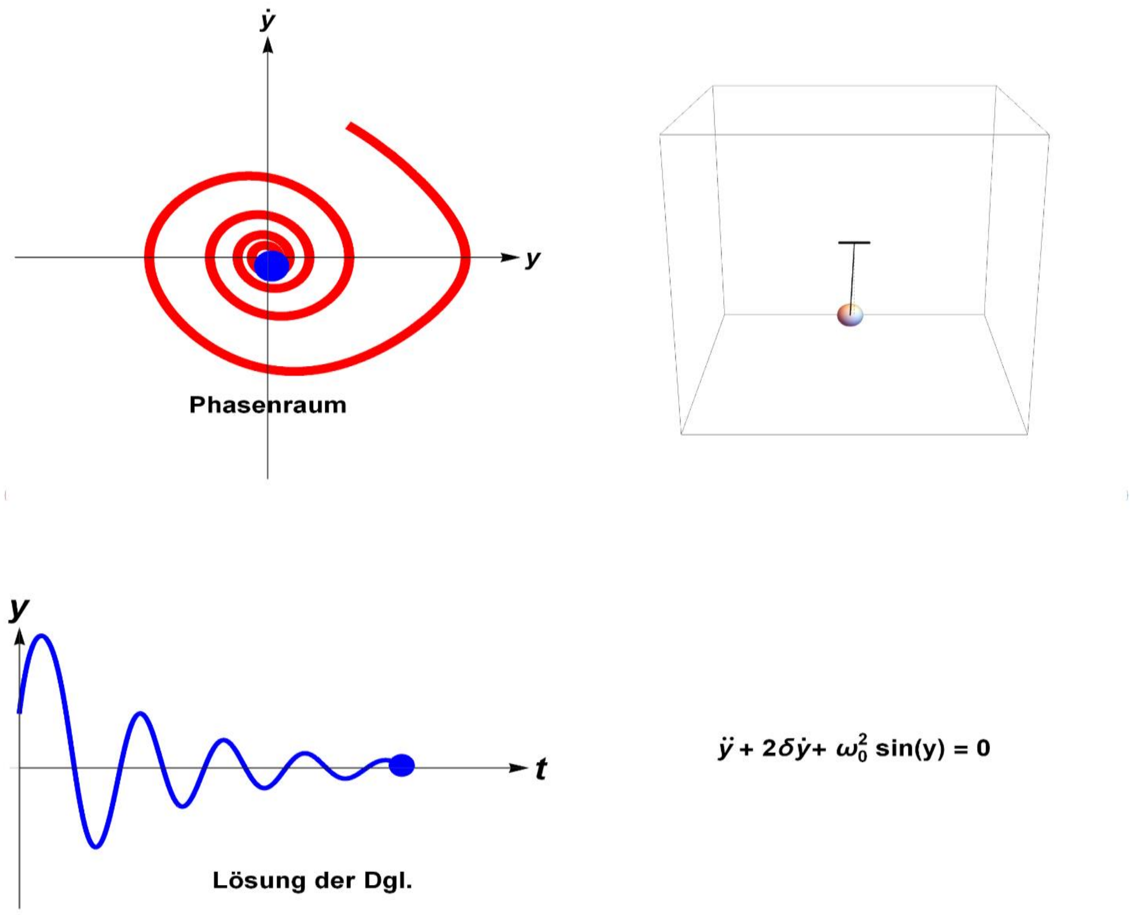
Das **nicht**linearen Pendelsystem mit Dämpfung

führt zur homogenen Differentialgleichung

des (nichtlinearen**)** Pendels mit Dämpfung 2δ

$$\ddot{y}(t) + 2\delta\dot{y}(t) + {\omega_0}^2 \sin((y(t)) = \ 0$$

mit der abklingenden Lösung:

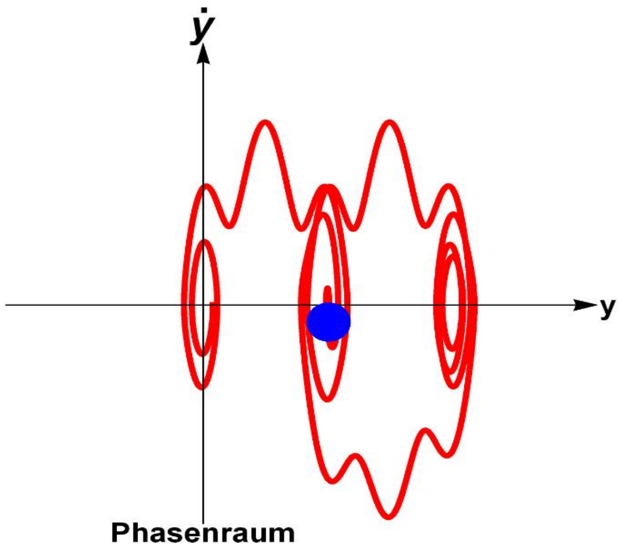


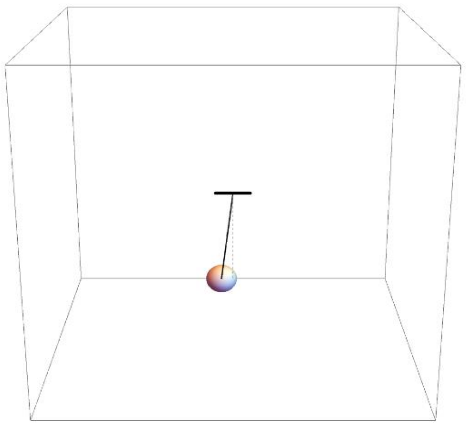
Lösung und Phasenraum der gedämpften homogenen nichtlinearen Differentialgleichung).
Video LINK zur Abb.
https://drive.google.com/file/d/1tkn_RHhsmcMKORbvKg7m6X96JcVc5fxY/view?usp=sharing

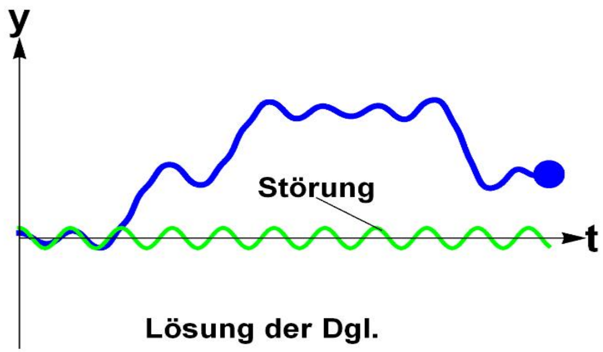
Durch eine periodische Anregung gestört, erhält man die inhomogene Differentialgleichung des (nichtlinearen) Pendels mit Dämpfung 2δ und Störfunktion $y_0\ \cos(\omega t)$:

$$\ddot{y}(t) + 2\delta\dot{y}(t) + {\omega_0}^2\sin(y(t)) = \ y_0 \cos(\omega t)$$

Speziell für die Parameter $\boldsymbol{\omega_0}$ *=1,* $\boldsymbol{\delta}$ *= 0* (ohne Dämpfung!), $\boldsymbol{y_0}$ *= 0,5,* $\boldsymbol{\omega}$ *= 2/3* haben wir chaotisches Verhalten:







$$\ddot{y} + \omega_0^2 \sin(y) = y_0 \cos(\omega t)$$

Lösung und Phasenraum Lösung der nichtlinearen inhomogenen Differentialgleichung ohne Dämpfung
Video LINK zur Abb.
https://drive.google.com/file/d/1BlwVLgA8i6FNw5YkxPU3NvgUChmqFdZx/view?usp=sharing

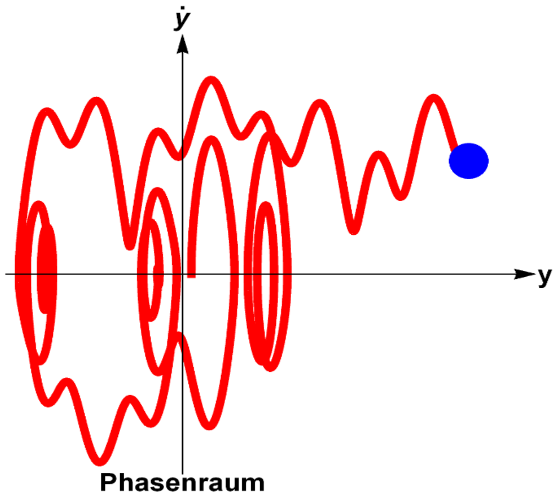
Eine andere Variante der Differentialgleichung (13.49) führt zu weiteren chaotischen Zuständen, z.B.:

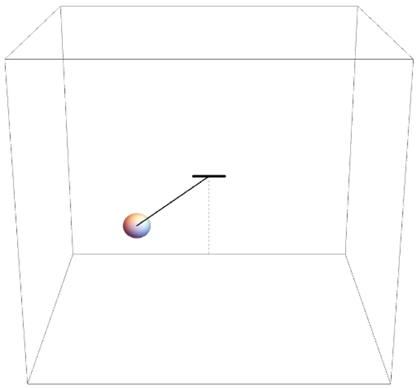
$$\ddot{y}(t) + 2\delta\dot{y}(t) - {\omega_0}^2 \sin\left(y(t)\right) = \ y_0 \cos\left(\omega t\right)$$

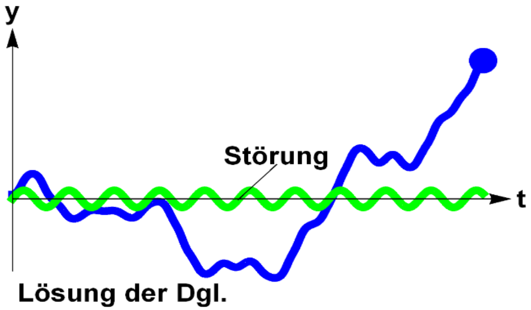
Mit den Parametern

$\omega_0 = 1, \ \ \delta = 0{,}01, \ y_0 = \frac{2}{3}, \ \omega = 0{,}5$

Hat man das chaotische Verhalten:







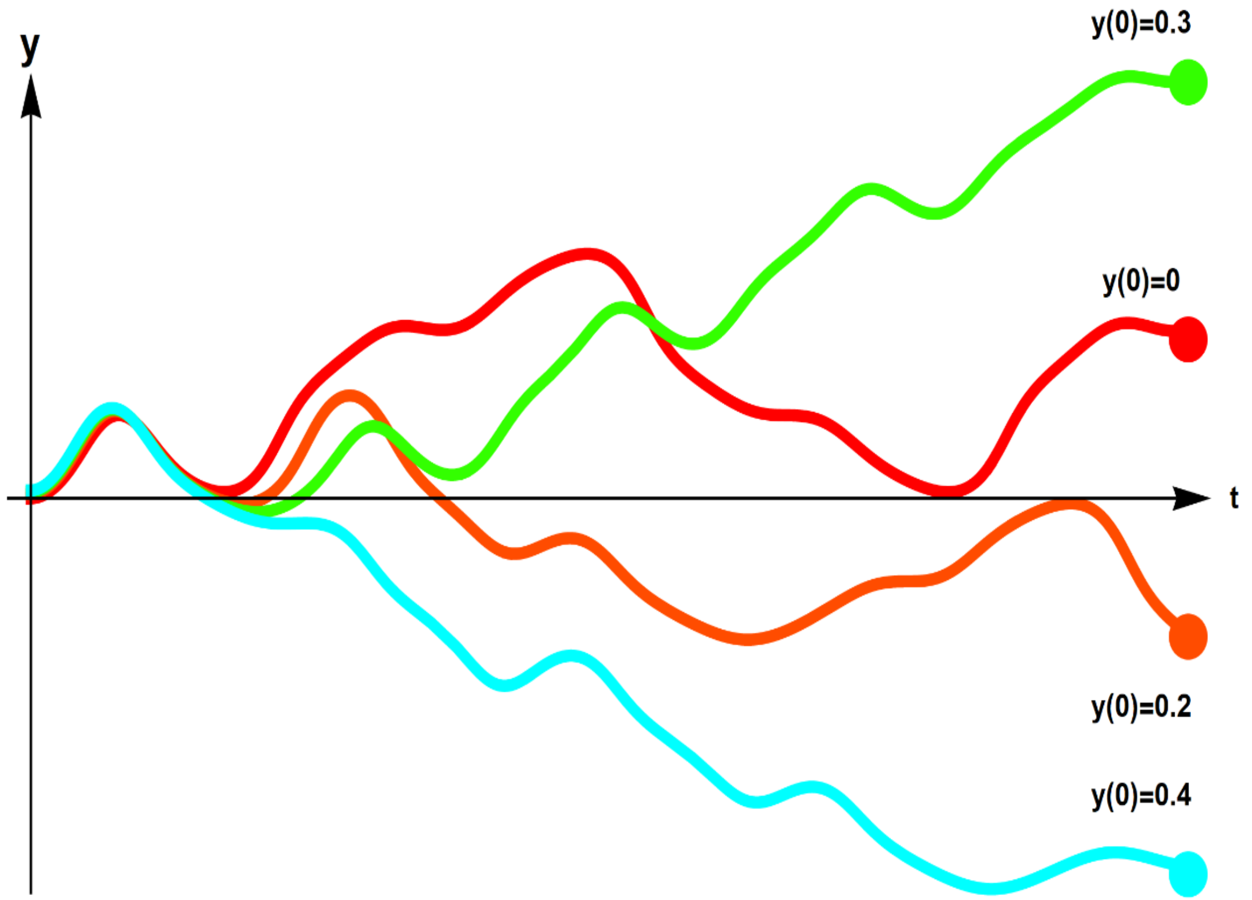
$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} - \omega_0^2 \sin(y) = y_0 \cos(\omega t)$$

Lösung und Phasenraum Mathematisches Pendel im chaotischen Zustand. Video LINK zur Abb.
https://drive.google.com/file/d/1_1_bC3Jv1LH64TUt7kZ3JzK2stJgv47L/view?usp=sharing

Das instabile Verhalten von nichtlinearen Differentialgleichungen gegenüber **Änderungen** der **Anfangsbedingungen** wird deutlich bei der nichtlinearen inhomogenen Differentialgleichung des mathematischen Pendels:

$$\ddot{y}(t) + 2\delta\dot{y}(t) - {\omega_0}^2 \sin(y(t)) = \ y_0 \cos(\omega t)$$

Wenn die Anfangsbedingungen (AB): y(0) variieren zwischen 0 und 0,3, starten die verschiedenen Lösungen am gleichen Punkt und laufen dann weit auseinander:



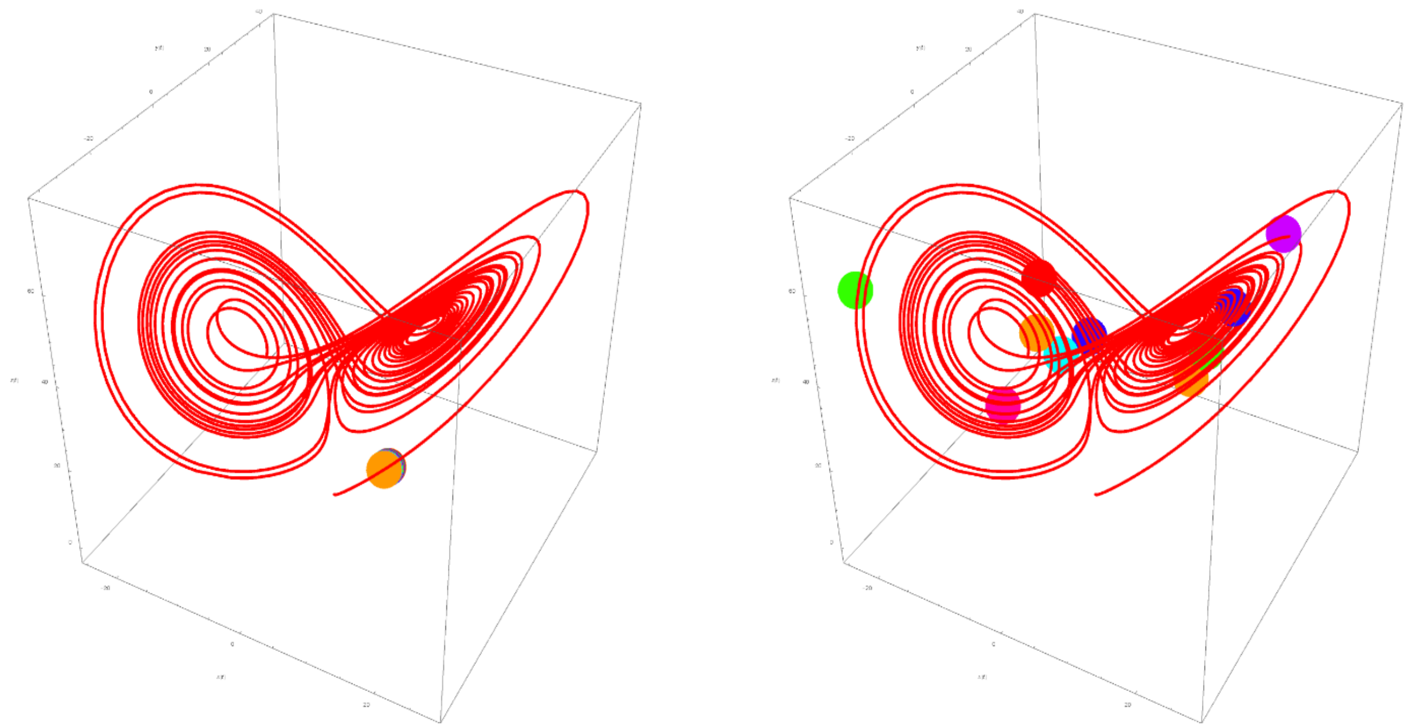
Lösungen der nichtlinearen Differentialgleichung unter verschiedenen Anfangsbedingungen

Ein weiteres Beispiel für die extreme Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen ist das gekoppelte nichtlineare Differentialgleichungssystem von E. N. Lorenz:

$$\dot{X} = a(Y - X)$$
$$\dot{Y} = X(r - Z) - Y$$
$$\dot{Z} = XY - bZ$$

mit den Parametern $a = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$.

Die Lösungen dieses Systems werden als sogenannter **Lorenz-Attraktor** bezeichnet:



Lösungen des nichtlinearen Differentialgleichungssystems unter verschiedenen Anfangsbedingungen nach verschieden Entwicklungszeiten

Im Video zum Lorenzattraktor kann man sehen, dass zehn Anfangszustände, die sich anfangs geringfügig unterscheiden, sich schließlich zu grundsätzlich verschiedenen Zuständen entwickeln. Die Bahnen der Zustände im Phasenraum laufen total auseinander.

Video LINk zum Lorenzattraktor
https://drive.google.com/file/d/1LpcmAGgGF_BhE8zvRTr4DKdmTt8W23ZK/view?usp=sharing

Dieses Differentialgleichungssystem stellt ein stark vereinfachtes Wettermodell dar. Das Phänomen der extremen Instabilität bezüglich der Anfangsbedingungen wurde von Lorenz entdeckt und beschrieben mit der Frage:

„**Löst ein Schmetterlingsschlag in Brasilien einen Tornado in Texas aus?**“

“*Predictability: Does the Flap of a Butterfly’s Wings in Brazil set off a Tornado in Texas*?”
Vortrag E. N. Lorenz vor der American Association for the Advancement of Science 1972