Integralrechnung im Mehrdimensionalen

2. Teil

Dreifachintegrale

Dreifachintegrale

Gegeben seien der Körper mit den Volumengrenzen

$$(\mathrm{V}) = \begin{pmatrix} z_u(x,y) \leq z(x,y) \leq z_o(x,y) \\ y_u(x) \leq y(x) \leq y_o(x) \\ a \leq x \leq b \end{pmatrix}$$

und die „Dichtefunktion“ f: $(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z)$ für $(x, y, z) \in V$.

Z.B. Massendichte oder Ladungsdichte in einem Volumen V.

Berechnung

Die Berechnung des Dreifachintegrals von *f* über *V* erfolgt durch sukzessive Reduktion auf ineinander geschachtelte Einfachintegrationen, also:

$$\mathrm{I_k} = \iiint\limits_V f(x, y, z)\ dv$$

$$= \int\limits_{x=a}^{x=b} \left(\int\limits_{y=y_u(x)}^{y=y_o(x)} \left(\int\limits_{z=z_u(x,y)}^{z=z_o(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx$$

- Wenn $f(x, y, z) \equiv 1$(= konstant) ist für $(x, y, z) \in V$, dann ist das Integral $\mathrm{I_k}$ das Volumen *V* des Körpers.

- Wenn $f(x, y, z) \neq 1$ ist, dann entspricht das Integral $\mathrm{I_k}$ einer Masse oder einer Ladung des Körpers mit der ***Massedichte*** bzw. ***Ladungsdichte*** f.

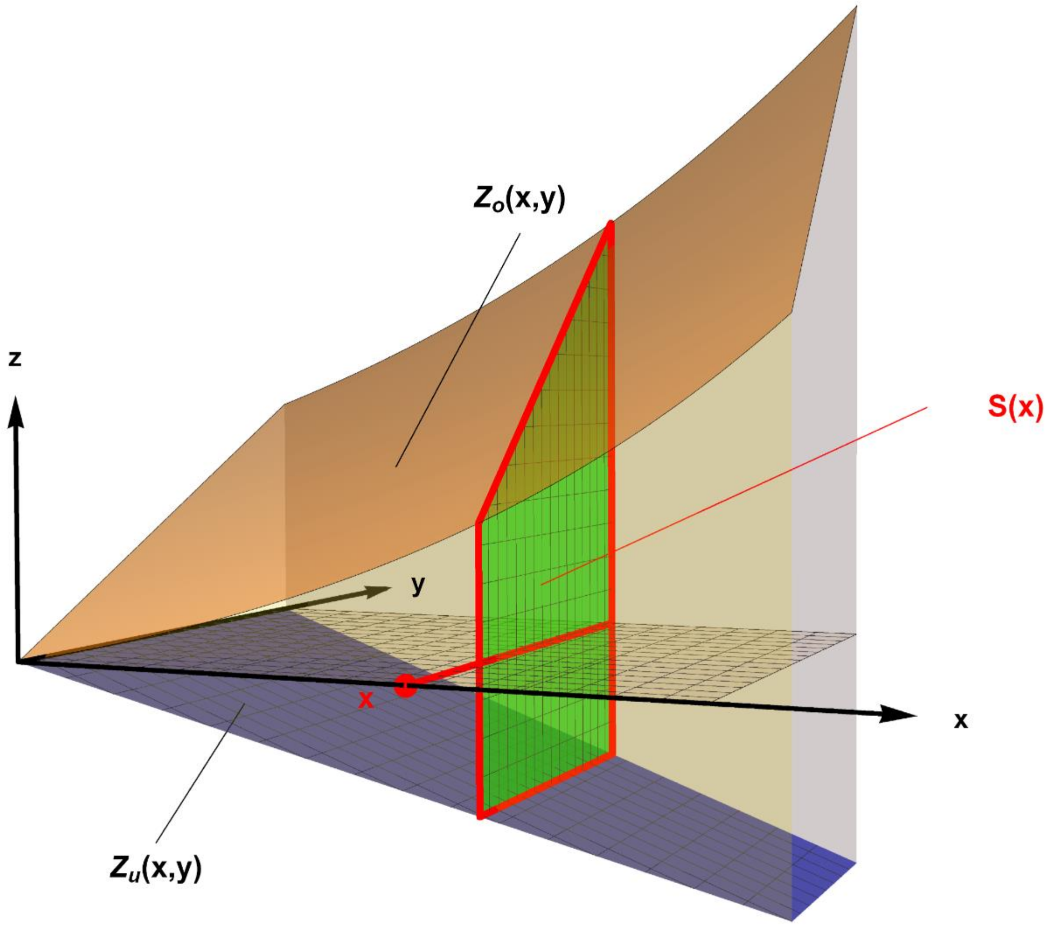
- Wenn $f(x, y, z) \equiv 1$und z_u = 0 ist, dann reduziert sich das Volumenintegral zu einem Doppelintegral.

Beispiel 17.8:

Gegeben seien der Körper mit den Volumengrenzen

$$(\mathrm{V}) = \begin{pmatrix} -x \leq z(x,y) \leq ye^{x} \\ x \leq y(x) \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{pmatrix}$$

und es gilt $f(x,y,z) \equiv 1$



http://sn.pub/pz1GkC

Dann ist das Volumen:

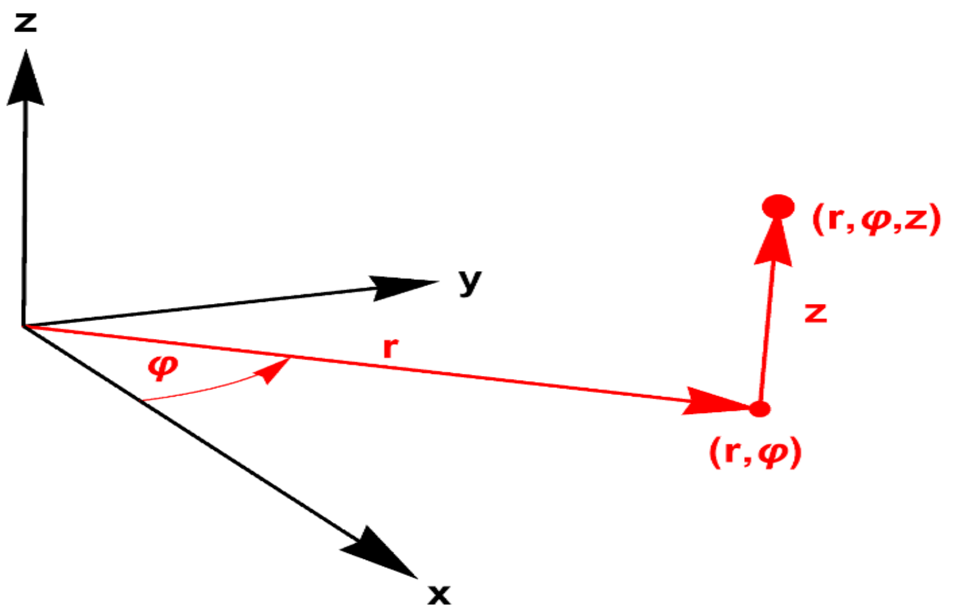
$$V = \iiint\limits_{(V)} 1dv = \int\limits_{x=0}^{x=1} \left(\int\limits_{y=x}^{y=2} \left(\int\limits_{z=-x}^{z=ye^x} dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int\limits_{x=0}^{x=1} \left(\int\limits_{y=x}^{y=2} (y\, e^x + x) \; dy \right) dx = \int\limits_{x=0}^{x=1} \left(2e^x + 2x - x^2 - \frac{x^2 e^x}{2} \right) dx$$

$$= \left[2e^x + x^2 - \frac{x^3}{3} - e^x \left(1 - x + \frac{x^2}{2} \right) \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{2} e - \frac{1}{3} = 3{,}74$$

Dreifachintegralen mit Zylinderkoordinaten

Ein Punkt P im Raum $\mathbb{R}^3$ wird dann beschrieben durch die Koordinaten r, φ und z, d.h. $P = (r, \varphi, z)$.



Gegeben seien der Körper mit den Volumengrenzen in Zylinderkoordinaten

$$(\mathrm{V}) = \begin{pmatrix} z_u(r,\varphi) \leq z(r,\varphi) \leq z_o(r,\varphi) \\ r_i(\varphi) \leq r(\varphi) \leq r_a(\varphi) \\ \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \end{pmatrix}$$

und die „Dichtefunktion“ $f(r,\varphi,z)$ für $(r,\varphi,z) \in V$.

Dann ist das Dreifachintegral:

$$\mathrm{I_k} = \iiint\limits_V f(r,\varphi,z)\ dv$$

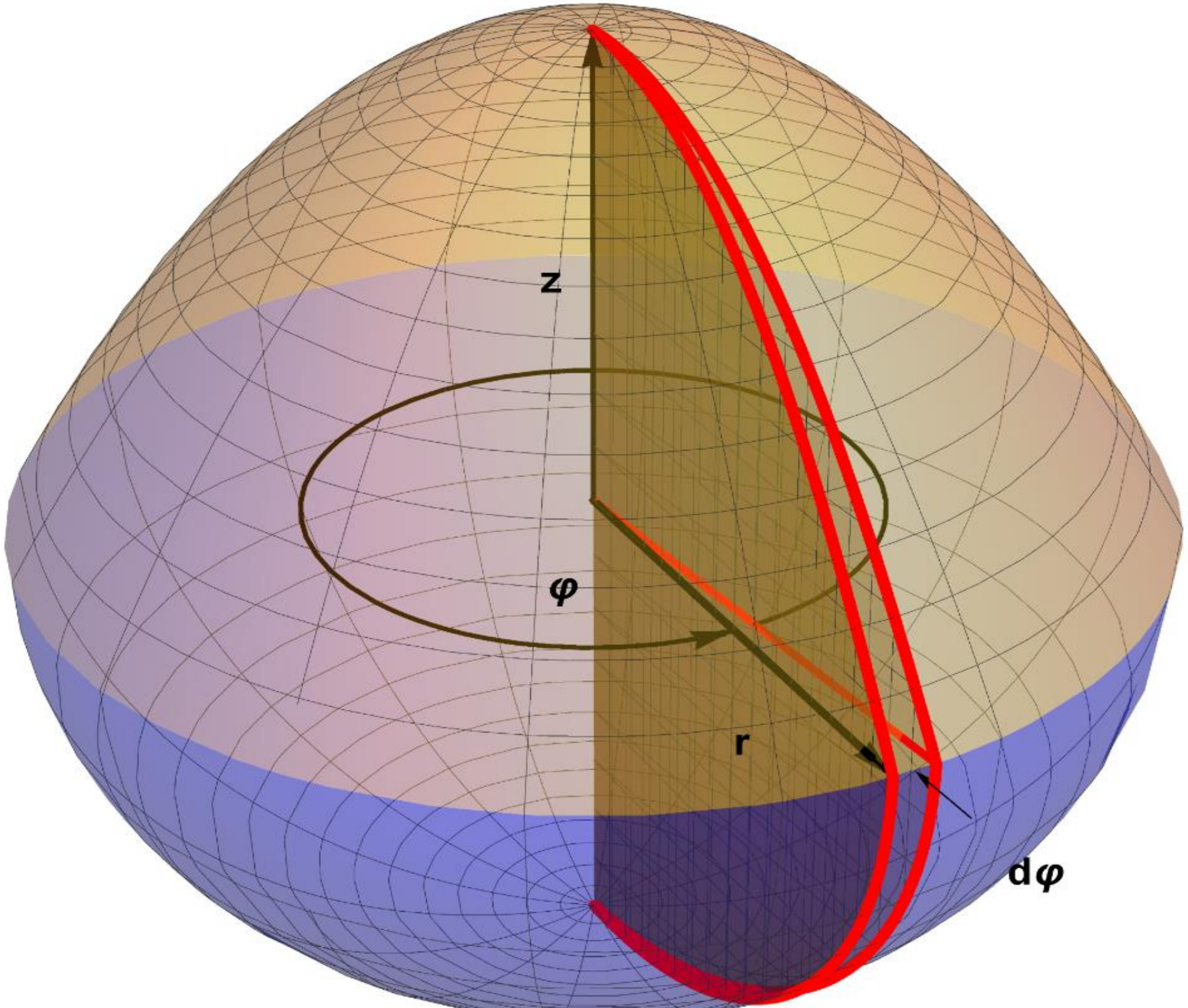
$$= \int\limits_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi=\varphi_2} \left(\int\limits_{r(\varphi)=r_i(\varphi)}^{r(\varphi)=r_a(\varphi)} \left(\int\limits_{z(r,\varphi)=z_u(r,\varphi)}^{z(r,\varphi)=z_o(r,\varphi)} f(r,\varphi,z)\ {\color{red}r}\ dz \right) dr \right) d\varphi$$

Beispiel 17.9:

Gegeben ein rotationssymmetrischer Körper mit den Volumengrenzen

$$(\mathrm{V}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-r^2} \leq z(r,\varphi) \leq 1-r^2 \\ 0 \leq r(\varphi) \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{pmatrix}.$$

und es gilt $f(x,y,z) \equiv 1$


z
φ
r
dφ

Dann ist das Volumen:

$$V = \iiint_V 1 \ dv \ = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \underbrace{\left(\int_{r=0}^{r=1} \left(\int_{z=-\sqrt{1-r^2}}^{z=1-r^2} 1\, r\, dz \right) dr \right)}_{\text{unabhängig von } \varphi} d\varphi =$$

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\,\varphi \ \left(\int_{r=0}^{r=1} \left(\int_{z=-\sqrt{1-r^2}}^{z=1-r^2} 1\, r\, dz \right) dr \right) = 2\pi \left(\int_{r=0}^{r=1} \left(\int_{z=-\sqrt{1-r^2}}^{z=1-r^2} 1\, r\, dz \right) r \right)$$

$$=$$

$$= 2\pi \int_{r=0}^{r=1} r((1-r^2)+\sqrt{1-r^2})dr = \cdots = 2\pi(0{,}583) = 3{,}66$$

Beispiel 17.10:

Berechne die ***Masse*** des Körpers, der durch Rotation der Funktion

$$z = \sqrt{x} \quad \text{für} \;\; x \in [0,4]$$

um die *z*-Achse entsteht und die Massendichte

$$\rho(r, \varphi, z) = r\,(\cos(\varphi))^2 \;\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right] \text{hat.}$$

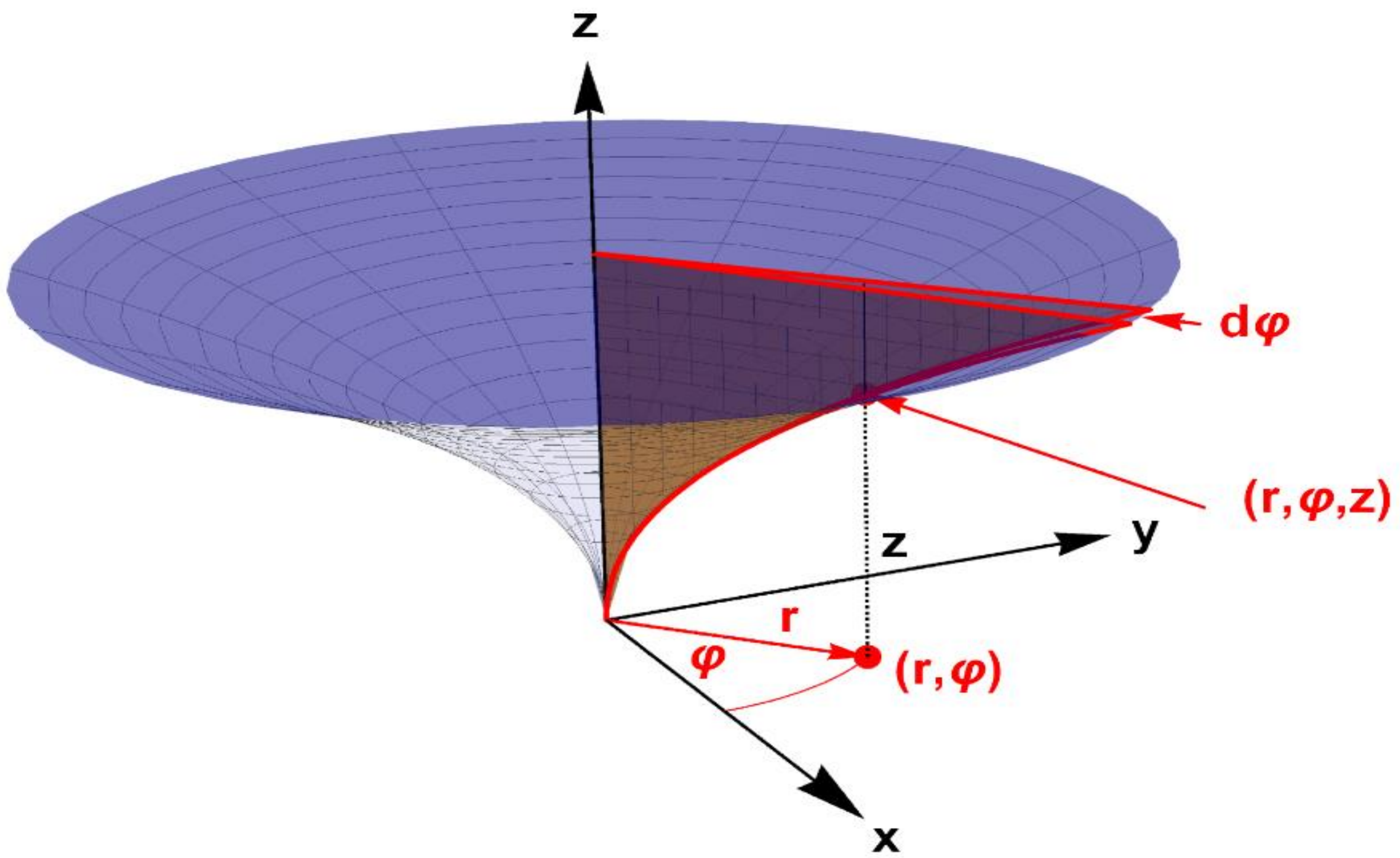
Wegen der Rotation von $z = \sqrt{x}$ um die *z*-Achse gilt

$$x \to r \text{ und damit ist } z = \sqrt{r}, \qquad r \epsilon [0,4].$$

Also ist der Körper begrenzt durch

$$(\mathrm{V}) = \begin{pmatrix} \sqrt{r} \leq z(r, \varphi) \leq 2 \\ 0 \leq r(\varphi) \leq 4 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{pmatrix}.$$

Körper, der durch Rotation der Funktion $z = \sqrt{x}$ für $x \epsilon [0,4]$ um die z-Achse entsteht



Dann ist die Masse des Körpers:

$$M = \iiint_V \rho(r,\varphi,z)\ dv = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=4} \left(\int_{z(r)=\sqrt{r}}^{z(r)=2} r^2\ (\cos(\varphi))^2\, dz\right) dr\right) d\varphi =$$

$$\left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} (\cos(\varphi))^2 d\varphi \right) \ \left(\int_{r=0}^{r=4} \left(\int_{z(r)=\sqrt{r}}^{z(r)=2} r^2\ dz\right) dr\right) = \cdots = \pi\, 6{,}09 = 19{,}13$$

Dimensionsrechnung ergibt $\left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)\mathrm{m}^3 = \mathrm{kg}$, d. h. $M = 19{,}13\ \mathrm{kg}$.

Beispiel 17.11:

Berechne das ***Volumen*** des Körpers, der durch Rotation der Funktion

$$z = f(x) = \sin(x) \text{ für } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

um die z-Achse entsteht mit

$$\sin(x) \leq z \leq 1$$

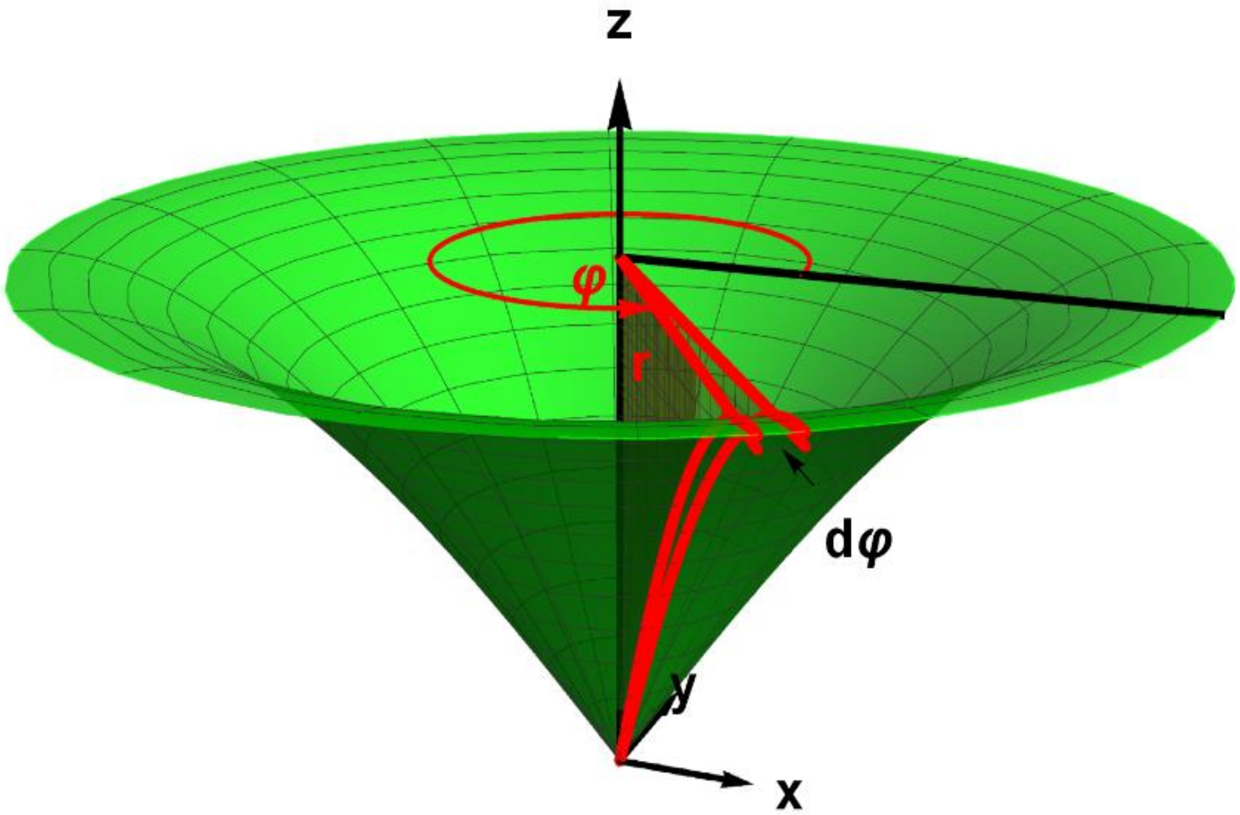
Wegen der Rotationssymmetrie setzen wir

$$x \to r \text{ und damit } \sin(x) \to \sin(r)$$

Also ist der Körper begrenzt durch

$$(\mathrm{V}) = \begin{pmatrix} \sin(r) \leq z(r,\varphi) \leq 1 \\ 0 \leq r(\varphi) \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{pmatrix}.$$

Körper, der durch Rotation der Funktion $z = sin(x)$ für $x \epsilon \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ um die z-Achse entsteht



http:\\sn.pub/D4YAaW

Dann ist das Volumen des Körpers:

$$V = \iiint\limits_{V} 1 \ dv$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=\frac{\pi}{2}} \left(\int_{z(r)=\sin(r)}^{z(r)=1} r \, dz \right) dr \right) d\varphi = 2\pi \int_{r=0}^{r=\frac{\pi}{2}} \left(\int_{z(r)=\sin(r)}^{z(r)=1} r \, dz \right) dr$$

$$= 2\pi \int_{r=0}^{r=\frac{\pi}{2}} r(1- \ sin(r)) \, dr = 2\pi \left(1 - \frac{\pi^2}{8} \right) = 1{,}468$$