Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme bestehen aus Gleichungen, bei denen die Unbekannten (d.h. die gesuchten Variablen x_i) nur linear, das heißt nur in der ersten Potenz und **nicht** als Produkt oder als nichtlineare Funktionen wie $\sin(x)$, $\ln(x)$ etc. vorkommen.

Themen sind

- Der Gaußsche Algorithmus
- Geometrische Anwendungen
- Die Cramersche Regel

Definition 12.1:

Das System von *m Gleichungen* und *n Unbekannten*

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots .. + a_{1n}x_n = c_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots .. + a_{2n}x_n = c_2\\
&. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad .\\
&. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad .\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots .. + a_{mn}x_n = c_m
\end{aligned}
$$

heißt *(n,m)-lineares Gleichungssystem (LGS)*. Die a_{ik} heißen *Koeffizienten* und die c_i *Konstanten* (Absolutglieder) des LGS.

Kurzschreibweise (als Matrizen Produkt):

$$\mathbf{A}\,\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{c}}$$

wobei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & a_{ik} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik})$$

die ***Koeffizientenmatrix*** und

Ein n-Tupel $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \epsilon\ \mathbb{R}^n$ heißt ***Lösung*** des LGS, wenn es alle m Gleichungen des LGS erfüllt.

Dann heißt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_k \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{x}$$ ***Lösungsvektor***

Ein n-Tupel $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \epsilon \mathbb{R}^n$ heißt ***Lösung*** des LGS, wenn es alle m Gleichungen des LGS erfüllt.

Dann heißt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_k \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{x}$$ ***Lösungsvektor*** und $$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ c_i \\ . \\ . \\ c_m \end{pmatrix} = \vec{c}$$ der ***Konstantenvektor.***

Wir betrachten hier nur die Fälle, bei denen die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl der Unbekannten ist, d.h. (n,n)-LGS (***quadratisches LGS***).

Prinzipiell gibt es drei Typen von Lösungen für lineare Gleichungssysteme:

1. Es gibt genau eine Lösung.
2. Es gibt (unendlich) viele Lösungen.
3. Es gibt keine Lösung.

Wir betrachten ein quadratisches ***LGS*** , d.h. ein (n,n) -System

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots ..+a_{1n}x_n = c_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots ..+a_{2n}x_n = c_2$$

$$\begin{matrix} . & & . \\ . & & . \end{matrix}$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots ..+a_{nn}x_n = c_n$$

Dann haben wir die Matrixdarstellung des LGS:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & a_{ik} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_k \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ c_i \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix}$$

was bedeutet

$$c_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k \,, \text{ für alle } \; i = 1, \dots, n$$

Dann haben wir die Matrixdarstellung des LGS:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & a_{ik} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_k \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ c_i \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix}$$

was bedeutet

$$c_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k\,, \text{ für alle } i = 1, \dots, n$$

Ziel des Gaußschen Algorithmus ist es ein gestaffeltes System der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & a_{ik} & . & . & . \\ . & . & . & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_k \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ c_i \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix}$$

zu erzeugen.

Die Lösung lässt sich dann schrittweise durch Einsetzen berechnen.

Durch „Weglassen“ der Variablen x_k , erhält man ein Koeffizientenschema:

$$
\begin{array}{c}
(z_1) \\ (z_2) \\ . \\ (z_i) \\ . \\ . \\ (z_n)
\end{array}
\qquad
\left.
\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{23} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & a_{ik} & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn}
\end{array}
\right|
\begin{array}{c}
c_1 \\ c_2 \\ . \\ c_i \\ . \\ . \\ c_n
\end{array}
$$

Dieses Schema lässt sich durch Äquivalente Umformungen in ein Dreiecksystem umformen, das dem gestaffelten System entspricht.

Äquivalente Umformungen sind:

1. Zeilen (= Gleichungen) dürfen vertauscht werden.

Dieses Schema lässt sich durch Äquivalente Umformungen in ein Dreiecksystem umformen, das dem gestaffelten System entspricht.

Äquivalente Umformungen sind:

1. Zeilen (= Gleichungen) dürfen vertauscht werden.
2. Spalten (außer der Konstantenspalte) dürfen vertauscht werden.

Dieses Schema lässt sich durch Äquivalente Umformungen in ein Dreiecksystem umformen, das dem gestaffelten System entspricht.

Äquivalente Umformungen sind:

1. Zeilen (= Gleichungen) dürfen vertauscht werden.
2. Spalten (außer der Konstantenspalte) dürfen vertauscht werden.
3. Zeilen (= Gleichungen) dürfen mit einer Zahl $\lambda \neq 0$ multipliziert werden.

Dieses Schema lässt sich durch Äquivalente Umformungen in ein Dreiecksystem umformen, das dem gestaffelten System entspricht.

Äquivalente Umformungen sind:

1. Zeilen (= Gleichungen) dürfen vertauscht werden.
2. Spalten (außer der Konstantenspalte) dürfen vertauscht werden.
3. Zeilen (= Gleichungen) dürfen mit einer Zahl $\lambda \neq 0$ multipliziert werden.
4. Zu einer Zeile kann ein Vielfaches einer anderen Zeile addiert werden.

Man führt nun folgende äquivalente Umformungen aus:

1. Schritt: Elimination von x_1 in der 2 bis *n*-ten Zeile,

d.h. Erzeugen von 0-en in der ersten Spalte

1.1 Ersetze die 2. Zeile (z_2) durch $(\tilde{z}_2) = (z_2) - (z_1)\frac{a_{21}}{a_{11}}$.

Man führt nun folgende äquivalente Umformungen aus:

1. Schritt: Elimination von x_1 in der 2 bis *n*-ten Zeile,

d.h. Erzeugen von 0-en in der ersten Spalte

1.1 Ersetze die 2. Zeile (z_2) durch $(\tilde{z}_2) = (z_2) - (z_1)\frac{a_{21}}{a_{11}}$.

1.2 Ersetze die 3. Zeile (z_3) durch $(\tilde{z}_3) = (z_3) - (z_1)\frac{a_{31}}{a_{11}}$.

Man führt nun folgende äquivalente Umformungen aus:

1. Schritt: Elimination von x_1 in der 2 bis *n*-ten Zeile,

d.h. Erzeugen von 0-en in der ersten Spalte

1.1 Ersetze die 2. Zeile (z_2) durch $(\tilde{z}_2) = (z_2) - (z_1)\frac{a_{21}}{a_{11}}$.

1.2 Ersetze die 3. Zeile (z_3) durch $(\tilde{z}_3) = (z_3) - (z_1)\frac{a_{31}}{a_{11}}$.

…….

1.i Ersetze die *i*-te Zeile (z_i) durch $(\tilde{z}_i) = (z_i) - (z_1)\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ für alle i bis n.

Dies führt zum Ergebnis (des 1.Schrittes):

$$
\begin{array}{c|ccccccc|c}
(z_1) & a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} & c_1 \\
(z_2) & 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & . & . & . & \tilde{a}_{2n} & \tilde{c}_2 \\
. & 0 & . & . & . & . & . & . & . \\
(z_i) & . & . & . & \tilde{a}_{ik} & . & . & . & \tilde{c}_i \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
(z_n) & 0 & \tilde{a}_{n2} & \tilde{a}_{n3} & . & . & . & \tilde{a}_{nn} & \tilde{c}_n
\end{array}
$$

Wenn man von der ersten Zeile und ersten Spalte absieht, erhält man ein (n-1,n-1)-Schema:

Dies führt zum Ergebnis (des 1.Schrittes):

$$
\begin{array}{c|cccccccc|c}
(z_1) & a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} & & c_1 \\
(z_2) & \color{red}{0} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & . & . & . & \tilde{a}_{2n} & & \tilde{c}_2 \\
. & \color{red}{0} & . & . & . & . & . & . & & . \\
(z_i) & . & . & . & \tilde{a}_{ik} & . & . & . & & \tilde{c}_i \\
. & . & . & . & . & . & . & . & & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & & . \\
(z_n) & \color{red}{0} & \tilde{a}_{n2} & \tilde{a}_{n3} & . & . & . & \tilde{a}_{nn} & & \tilde{c}_n
\end{array}
$$

Wenn man von der ersten Zeile und ersten Spalte absieht, erhält man ein (n-1,n-1)-Schema:

(n-1,n-1)-Schema :

$$\left.\begin{array}{ccccccc} \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} & . & . & . & \tilde{a}_{2n} \\ \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} & . & . & . & \tilde{a}_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \tilde{a}_{n2} & \tilde{a}_{n3} & \tilde{a}_{n4} & . & . & . & \tilde{a}_{nn} \end{array}\right| \begin{array}{c} \tilde{c}_2 \\ \tilde{c}_3 \\ . \\ \tilde{c}_i \\ . \\ . \\ \tilde{c}_n \end{array}$$

Dieses Schema kann man wie im ersten Schritt durch äquivalente Umformungen in einem **2. Schritt** umwandeln und erhält ein

$(n$-2$,n$-2$)$-Schema :

$$
\left.\begin{array}{ccccccc|c}
\tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} & . & . & . & \tilde{a}_{2n} & \tilde{c}_2 \\
0 & \tilde{\tilde{a}}_{33} & \tilde{\tilde{a}}_{34} & . & . & . & \tilde{\tilde{a}}_{3n} & \tilde{\tilde{c}}_3 \\
0 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & \tilde{\tilde{c}}_i \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & \tilde{\tilde{a}}_{n3} & \tilde{\tilde{a}}_{n4} & . & . & . & \tilde{\tilde{a}}_{nn} & \tilde{\tilde{c}}_n
\end{array}\right.
$$

Das Verfahren wird (n-1)-mal schrittweise weitergeführt, bis das Ziel erreicht ist: die **Dreiecksmatrix**.

Die **Dreiecksmatrix**. Dies entspricht dann dem gesuchten gestaffelten System (12.6), aus dem sich die Lösung leicht berechnen lässt:

$$
\left.\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\
0 & b_{22} & b_{23} & . & . & . & b_{2n} \\
0 & 0 & . & . & . & . & . \\
. & . & 0 & b_{ik} & . & . & . \\
. & . & . & 0 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & . & . & 0 & b_{nn}
\end{array}\right|
\begin{array}{c}
c_1 \\ d_2 \\ . \\ d_i \\ . \\ . \\ d_n
\end{array}
$$

Die letzte Zeile entspricht der Gleichung $b_{nn}x_n = d_n$.

$$b_{nn}x_n = d_n.$$

Diese Gleichung ist entscheidend für das Lösungsverhalten des LGS.
Es gibt drei Fälle:

1. $b_{nn} \neq 0 \quad \Longrightarrow$ Das LGS hat genau eine Lösung.
2. $b_{nn} = 0 \ \ und \ \ d_n \neq 0 \quad \Longrightarrow$ Das LGS hat keine Lösung.
3. $b_{nn} = 0 \ \ und \ \ d_n = 0 \quad \Longrightarrow$ Das LGS hat unendlich viele Lösungen.

Bemerkung :
Die ersten Quellen zur Lösung von linearen Gleichungssystemen stammen aus China ca. 100 v. Chr.:
s. Jiu Zhang Suanshu, Neun Kapitel der Rechenkunst

Beispiel 1:

Betrachte das LGS

$$\begin{cases} (1) \quad x - y = 1 \\ (2) \quad -x + 3y = 2 \end{cases}$$

Lösung:

Addiere (1) und (2), dann entsteht das LGS

$$\begin{aligned} &(1) \quad x - y = 1 \\ &(3) \quad 0x + 2y = 3, \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad 2y = 3 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{3}{2}.$$

Einsetzen in (1): $\Longrightarrow \quad x = 1 + \frac{3}{2}$

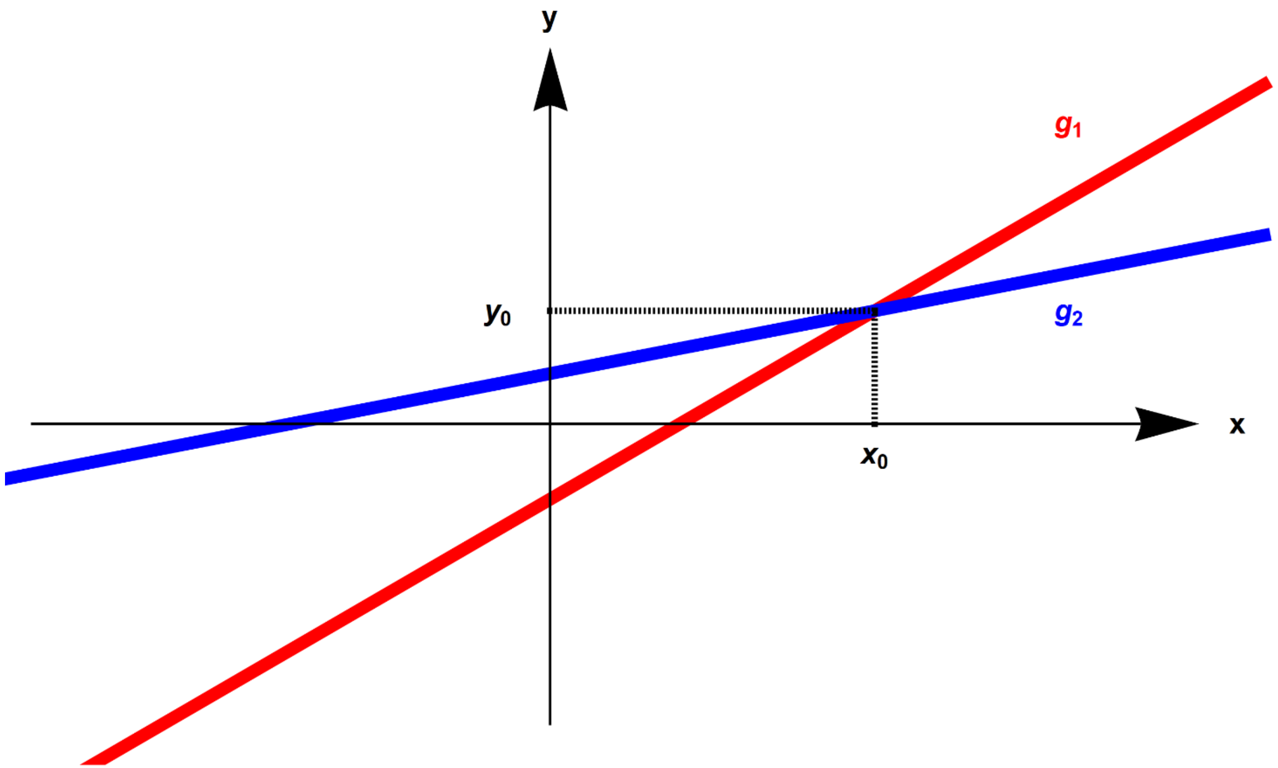
Also ist die Lösung des LGS: $(x_0, y_0) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Grafische Darstellung:

Die Gleichungen (1) und (2) kann man nach *y* auflösen und erhält dann zwei Geraden mit einem Schnittpunkt

$$(1)\ g_1 \Longrightarrow \quad y = x - 1, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(2)\ g2 \Longrightarrow \quad y = x/3 + 2/3, \qquad x \in \mathbb{R}$$



Das System hat genau eine Lösung.

Beispiel 2:

Betrachte das LGS

$$\begin{cases} (1) \quad\quad x - 2y = 1 \\ (2) \; -x + 2y = 2 \end{cases}$$

Lösung:

Addiere (1) und (2), dann entsteht das LGS

$$\begin{aligned} &(1) \quad x - 2y = 1 \\ &(3) \quad 0x + 0y = 3, \end{aligned}$$

Also $0\,x + 0\,y = 3 \;\rightarrow$ Widerspruch!

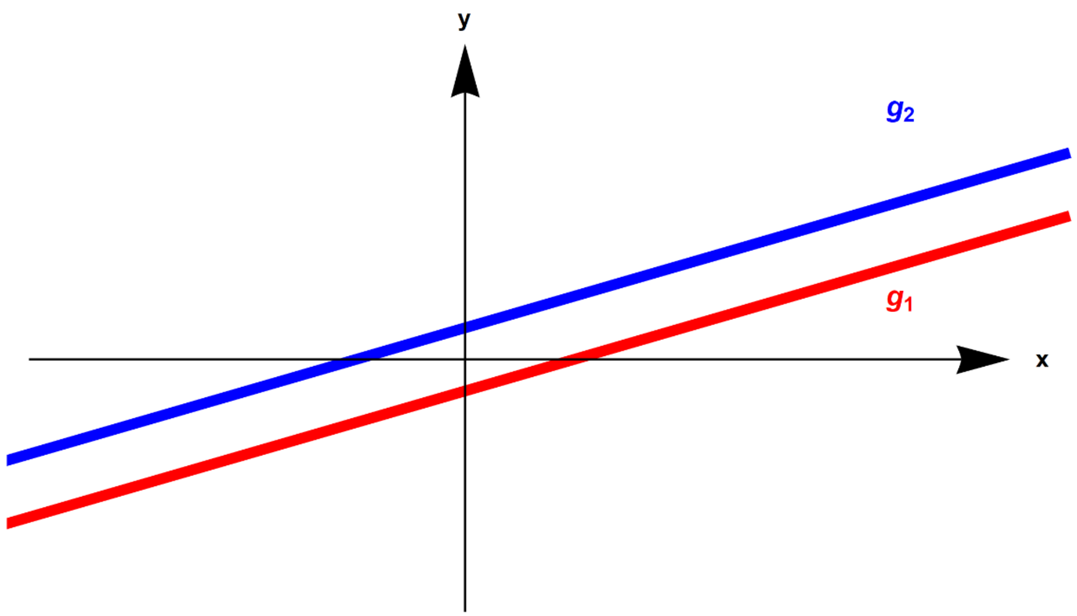
Es gibt also kein (x, y) als Lösung!

Grafische Darstellung:

Die Gleichungen (1) und (2) kann man nach *y* auflösen und erhält dann zwei parallele Geraden ohne Schnittpunkt .

$$(1) \quad g_1 \Longrightarrow \quad \boldsymbol{y = x/2 + ½}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(2) \quad g_2 \Longrightarrow \quad \boldsymbol{y = x/2 + 1}, \qquad x \in \mathbb{R}$$



Das System hat keine Lösung.

Beispiel 3:

Betrachte das LGS

$$\begin{cases} (1) \quad x - 2y = 1 \\ (2) \quad -2x + 4y = -2 \end{cases}$$

Lösung:

Addiere (1) und ½ (2), dann entsteht das LGS

$$(1) \quad x - 2y = 1$$

$$(3) \quad 0x + 0y = 0,$$

also $0\,x = 0$

Damit ist x beliebig wählbar und es folgt

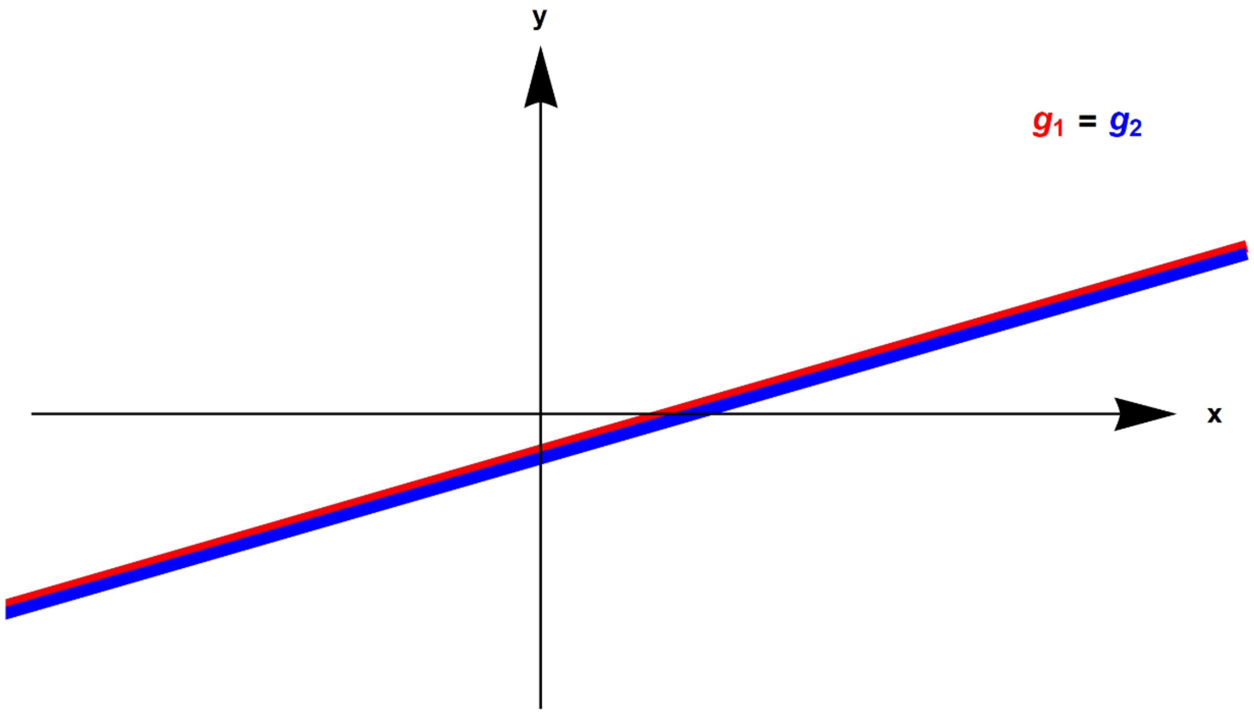
(1) $\Longrightarrow$ y = x/2-1/2 (2) $\Longrightarrow$ y = x/2-1/2

Grafische Darstellung:

Die Menge der Lösungen ist eine gemeinsame Gerade (s. Abb. 12.3):

$$(1)\ g_1 \Longrightarrow \quad \boldsymbol{y = x/2 - 1/2},\ x \in \mathbb{R}$$

$$(2)\ g_2 \Longrightarrow \quad \boldsymbol{y = x/2 - 1/2},\ x \in \mathbb{R}$$



Das System hat unendlich viele Lösungen.

Beispiel 4: (Inhomogenes LGS, genau eine Lösung)

Betrachte das LGS

$$\begin{cases} (1) & -\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{0} \\ (2) & \mathbf{x} - \mathbf{3}\,\mathbf{y} - \mathbf{2}\,\mathbf{z} = \mathbf{5} \\ (3) & \mathbf{5}\,\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{4}\,\mathbf{z} = \mathbf{3} \end{cases}$$

Jede Gleichung beschreibt eine Ebene in $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ (s. Abb.unten).

Gesucht sind x, y, z.

Lösung:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & -x + y + z = 0 \\
(2) & x - 3y - 2z = 5 \\
(3) & 5x + y + 4z = 3
\end{array}
$$

1.Schritt: Eliminiere x aus (2) und (3) mit (1)+(2)=(4) und 5 (1)+(3)=(5):

$$
\begin{array}{ll}
(1) & -x + y + z = 0 \\
(4) & -2y - z = 5 \\
(5) & 6y + 9z = 3
\end{array}
$$

2.Schritt: Eliminiere y aus (5) mit (4)+(5)=(6):

$$
\begin{array}{ll}
(1) & -x + y + z = 0 \\
(4) & -2y - z = 5 \\
(6) & 6z = 18
\end{array}
$$

Dies ist ein gestaffeltes System.

Daraus ergeben sich die Lösungskomponenten durch Einsetzen:

(6): $\mathbf{6\,z = 18} \Rightarrow z = 3$

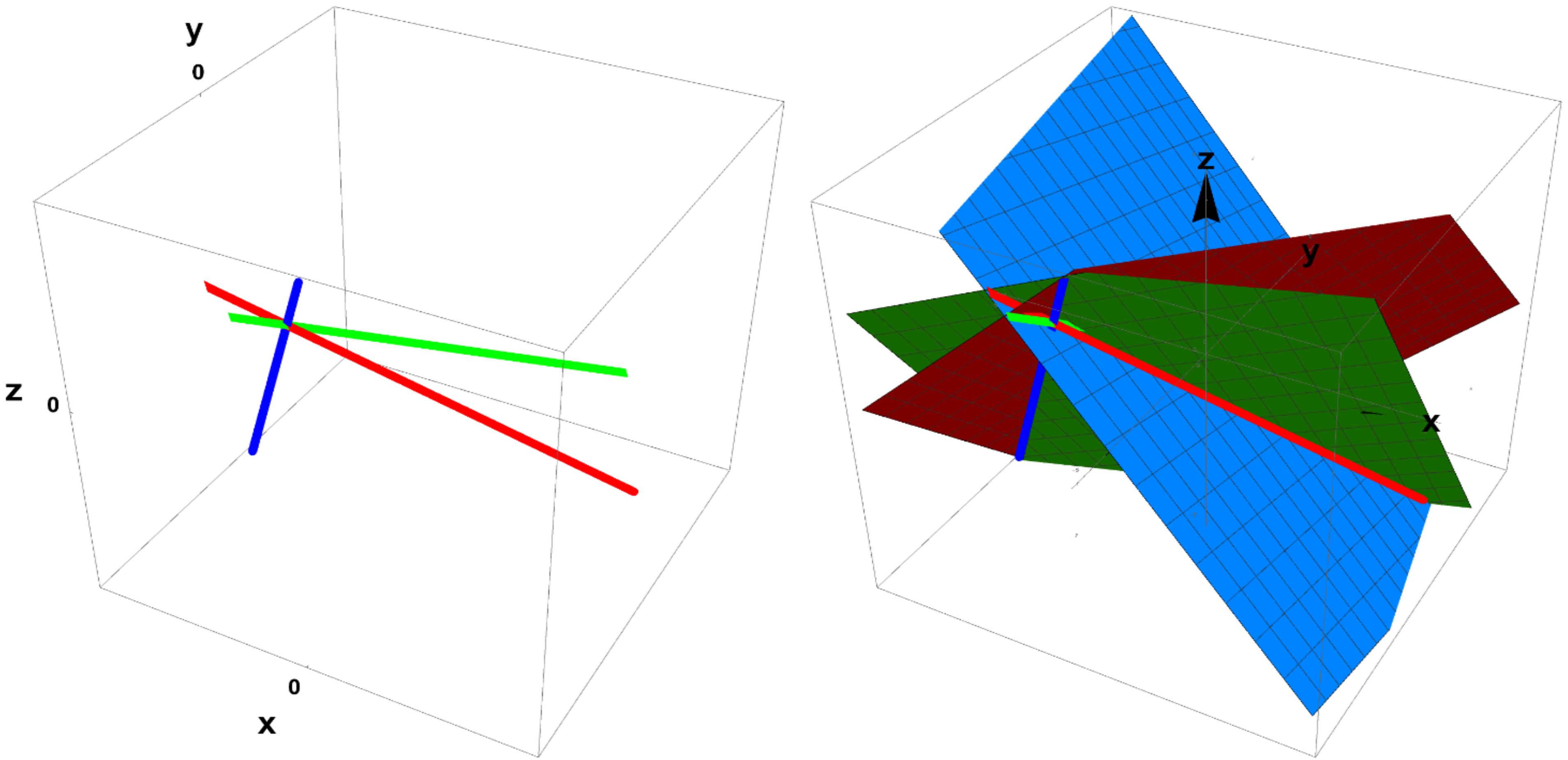
(4): $\mathbf{-2\,y - z = 5} \Rightarrow y = -4$

(1): $-\mathbf{x + y + z = 0} \Rightarrow x = -1$

Also gibt es genau eine Lösung des LGS:

$\{x, y, z\} = \{-1, -4, 3\}$

http://sn.pub/bajsfd



Das System (Beisp.4) hat genau eine Lösung. Im Video LINK dreht sich das Bild in 3D.

http://sn.pub/bajsfd
http://sn.pub/oFJ1A4

Beispiel 5: (Inhomogenes LGS, keine Lösung)

Betrachte das LGS

$$\begin{cases} (1) & x - 3y + 5z = 26 \\ (2) & 2x - 2y + z = 12 \\ (3) & -3x + 5y - 6z = 2 \end{cases}$$

Kurzschreibweise im Koeffizientenschema:

$$\begin{array}{lrrrr} (1) & 1 & -3 & 5 & 26 \\ (2) & 2 & -2 & 1 & 12 \\ (3) & -3 & 5 & -6 & 2 \end{array}$$

(1)	1	-3	5	26
(2)	2	-2	1	12
(3)	-3	5	-6	2

1.Schritt: Eliminiere x aus (2) und (3) mit -2 (1)+(2) = (4) und 3 (1)+(3) = (5):

(1)	1	-3	5	26
(4)	0	4	-9	-40
(5)	0	-4	9	80

2.Schritt: Eliminiere y aus (5) mit (4)+(5)=(6):

(1)	1	-3	5	26
(4)	0	4	-9	-40
(6)	0	0	0	40

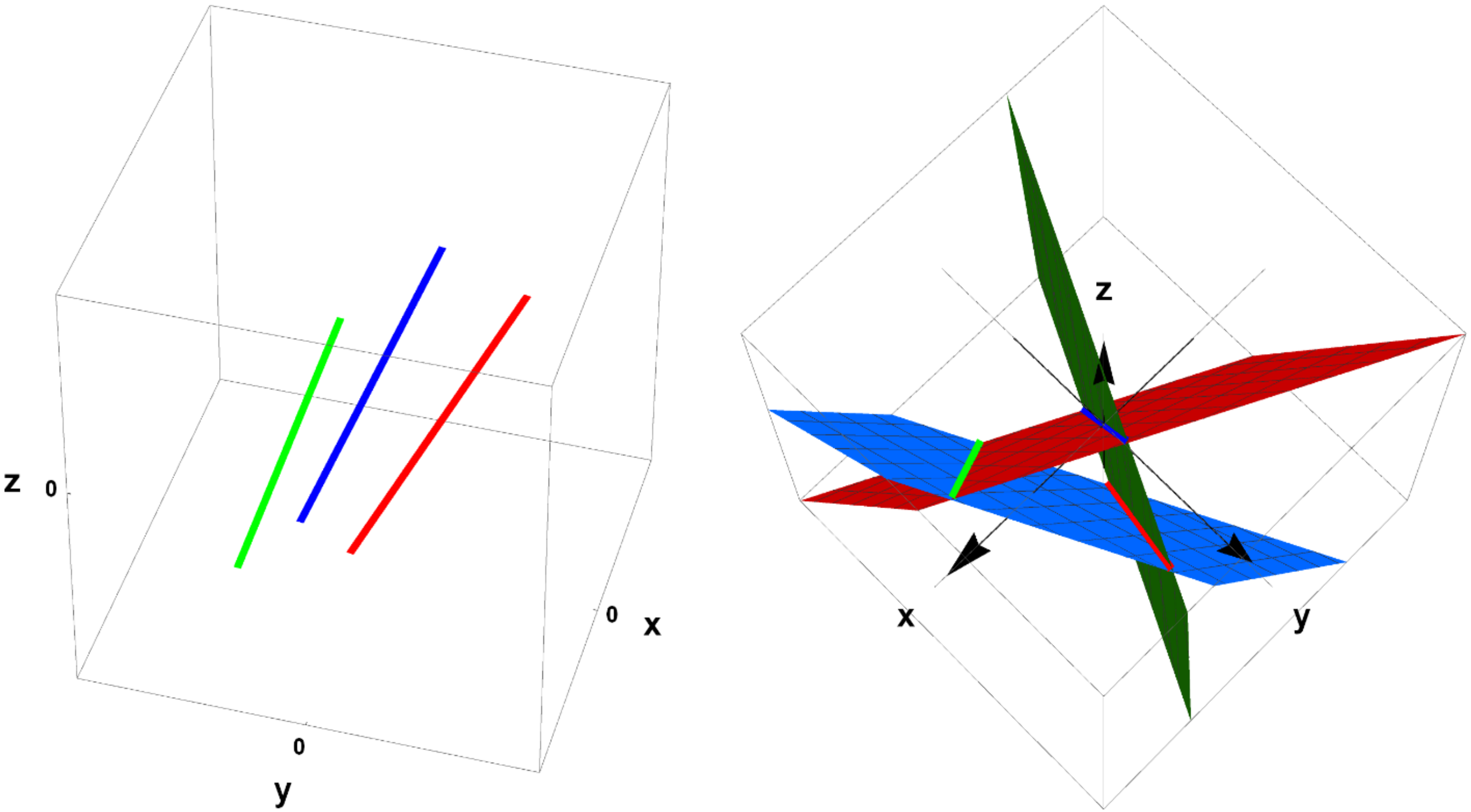
Dies ist ein gestaffeltes System.

Die Zeile (6) bedeutet

(6): $\mathbf{0}\,\boldsymbol{z} = \mathbf{40} \implies$ es gibt kein z $\in \mathbb{R}$ als Lösung!

Also hat das LGS keine Lösung!

Die Schnittgeraden liegen parallel, es gibt somit keinen gemeinsamen Schnittpunkt, d.h. keine Lösung des LGS



Das System (Beisp.5) hat keine Lösung. Im Video LINK dreht sich das Bild in 3D.

http://sn.pub/P0MssL

http://sn.pub/slDRJw

Beispiel 6: (Inhomogenes LGS, unendlich viele Lösungen)

Betrachte das LGS

$$\begin{cases} (1) & x + y + 3z = 2 \\ (2) & 2x + 3y - z = 1 \\ (3) & 3x + 4y + 2z = 3 \end{cases}$$

Kurzschreibweise im Koeffizientenschema:

$$\begin{array}{lrrrr} (1) & 1 & 1 & 3 & 2 \\ (2) & 2 & 3 & -1 & 1 \\ (3) & 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrr} (1) & 1 & 1 & 3 & 2 \\ (2) & 2 & 3 & -1 & 1 \\ (3) & 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}$$

1.Schritt: Eliminiere x aus (2) und (3) mit -2 (1)+(2) = (4) und -3 (1)+(3) = (5):

$$\begin{array}{lrrrr} (1) & 1 & 1 & 3 & 2 \\ (4) & 0 & 1 & -7 & -3 \\ (5) & 0 & 1 & -7 & -3 \end{array}$$

2.Schritt: Eliminiere y aus (5) mit (4)-(5)=(6):

$$\begin{array}{lrrrr} (1) & 1 & 1 & 3 & 2 \\ (4) & 0 & 1 & -7 & -3 \\ (6) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Dies ist ein gestaffeltes System.

Die Zeile (6) bedeutet

$$(6): \qquad 0\,z = 0 \implies \text{dies gilt für alle } z \in \mathbb{R}!$$

Wähle $z = \lambda$. Dann folgt

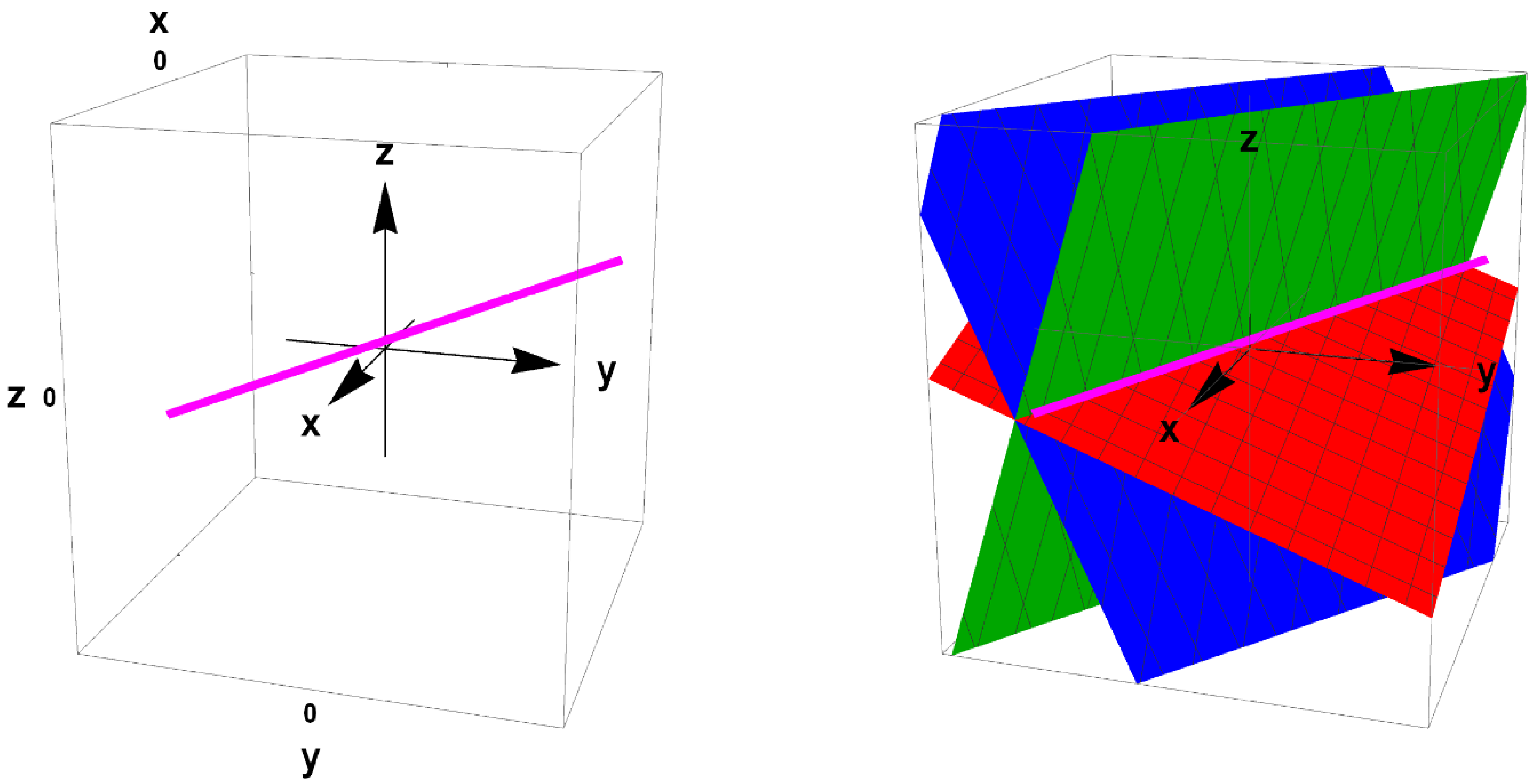
$$(4) \implies y - 7\lambda = -3 \implies y = 7\lambda - 3$$

$$(1) \implies x + 7\lambda - 3 + 3\lambda = 2 \implies x = -10\lambda + 5$$

Also haben wir

$$\begin{cases} x = -10\lambda + 5 \\ y = 7\lambda - 3 \qquad , \text{ für } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Dies ist die Parameterdarstellung einer Geraden in $\mathbb{R}^3$ (die nicht durch $\vec{0}$ geht).
Damit hat das LGS unendlich viele Lösungen.



Das System (12.17) hat unendlich viele Lösungen. Im Video LINK dreht sich das Bild in 3D.

http://sn.pub/D8Aqt1

http://sn.pub/S2wo01

Beispiel 7: (Homogenes LGS, genau eine Lösung {x, y, z}= {0, 0, 0})

Betrachte das LGS

$$\begin{cases} (1) & -x + y + z = 0 \\ (2) & x - 3y - 2z = 0 \\ (3) & 5x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

Kurzschreibweise im Koeffizientenschema:

(1)	-1	1	1	0
(2)	1	-3	-2	0
(3)	5	1	4	0

$$\begin{array}{lrrrr}
(1) & -1 & 1 & 1 & 0 \\
(2) & 1 & -3 & -2 & 0 \\
(3) & 5 & 1 & 4 & 0
\end{array}$$

1.Schritt: Eliminiere x aus (2) und (3) mit (1)+(2) = (4) und 5 (1)+(3) = (5):

$$\begin{array}{lrrrr}
(1) & 1 & 1 & 1 & 0 \\
(4) & 0 & -2 & -1 & 0 \\
(5) & 0 & 6 & 9 & 0
\end{array}$$

2.Schritt: Eliminiere y aus (5) mit 3(4)+(5) = (6):

$$\begin{array}{lrrrr}
(1) & 1 & 1 & 1 & 0 \\
(4) & 0 & -2 & -1 & 0 \\
(6) & 0 & 0 & 6 & 0
\end{array}$$

Dies ist ein gestaffeltes System.

Die Zeile (6) bedeutet

$$(6): \qquad \mathbf{6\,z = 0} \implies z = 0$$

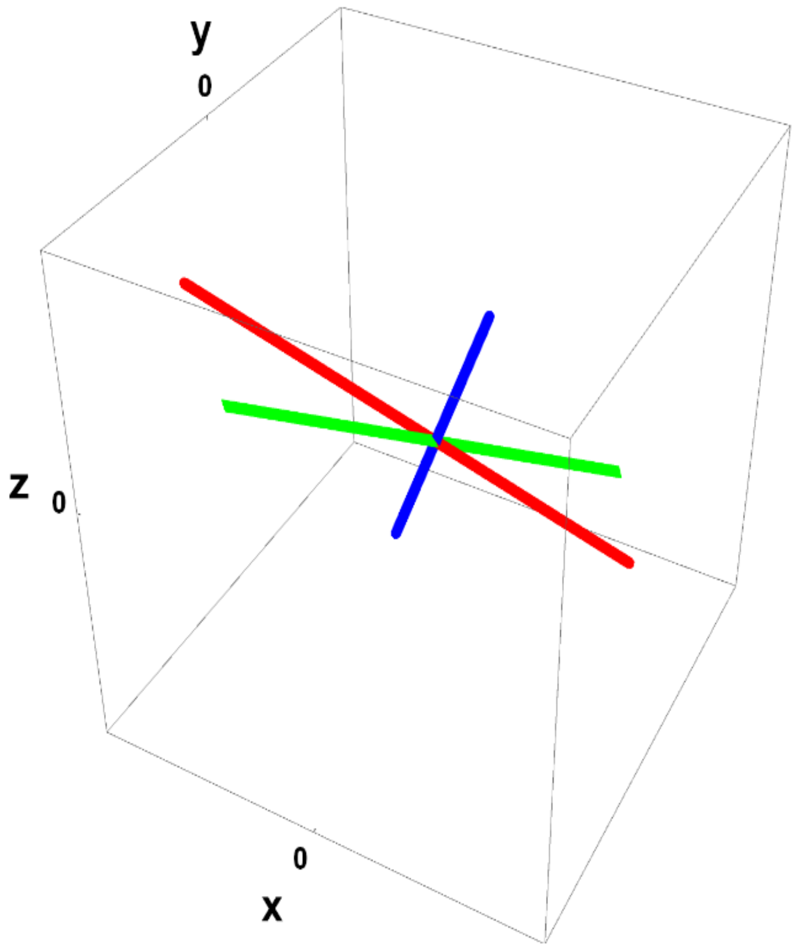
Dann folgt

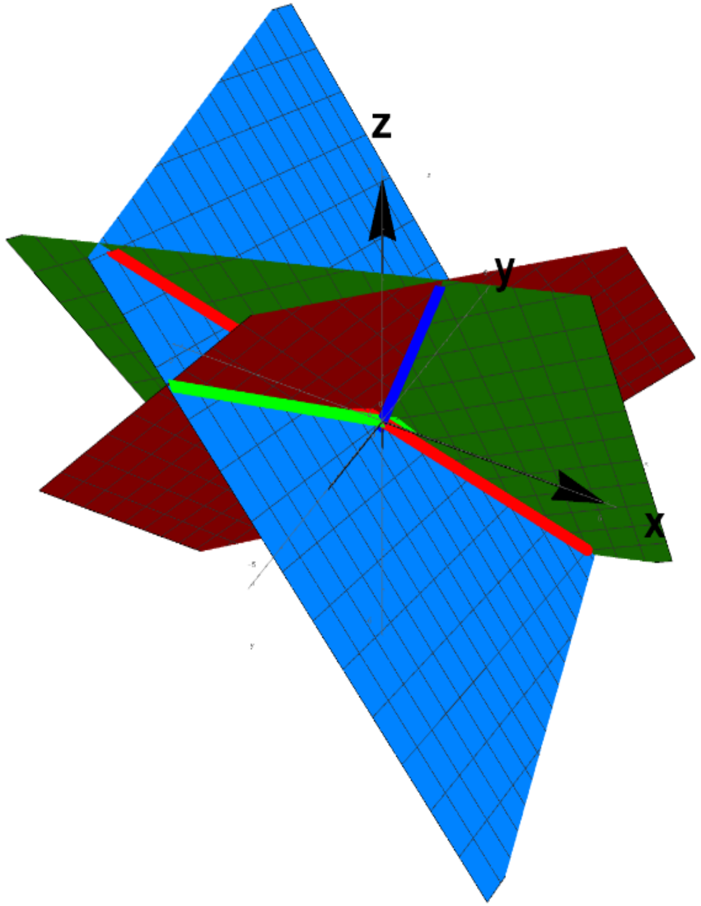
$$(4) \implies y = 0$$

$$(1) \implies x = 0$$

Also haben wir die (einzige) Lösung des LGS

$$\{x, y, z\} = \{0, 0, 0\})$$





Das System (12.18) hat nur (0,0,0) als Lösung. Im Video LINK dreht sich das Bild in 3D.

http://sn.pub/StDUvI

http://sn.pub/Kpf1z2

Beispiel 8: (Homogenes LGS, unendlich viele Lösungen)

Betrachte das LGS

$$\begin{cases} (1) & x + 4y - 6z = 0 \\ (2) & 2x - y + 2z = 0 \\ (3) & 3x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$$

Kurzschreibweise im Koeffizientenschema:

(1)	1	4	−6	0
(2)	2	−1	2	0
(3)	3	3	−4	0

$$\begin{array}{lcccc}
(1) & 1 & 4 & -6 & 0 \\
(2) & 2 & -1 & 2 & 0 \\
(3) & 3 & 3 & -4 & 0
\end{array}$$

1.Schritt: Eliminiere x aus (2) und (3) mit -2 (1)+(2) = (4) und -3 (1)+(3) = (5):

$$\begin{array}{lcccc}
(1) & 1 & 1 & 3 & 0 \\
(4) & 0 & -9 & 14 & 0 \\
(5) & 0 & -9 & 14 & 0
\end{array}$$

2.Schritt: Eliminiere y aus (5) mit (4)-(5)=(6):

$$\begin{array}{lcccc}
(1) & 1 & 1 & 3 & 0 \\
(4) & 0 & -9 & 14 & 0 \\
(6) & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Dies ist ein gestaffeltes System.

Die Zeile (6) bedeutet

$$(6): \qquad \mathbf{0\,z = 0} \implies \text{dies gilt für alle } z \in \mathbb{R}!$$

Wähle z = λ . Dann folgt

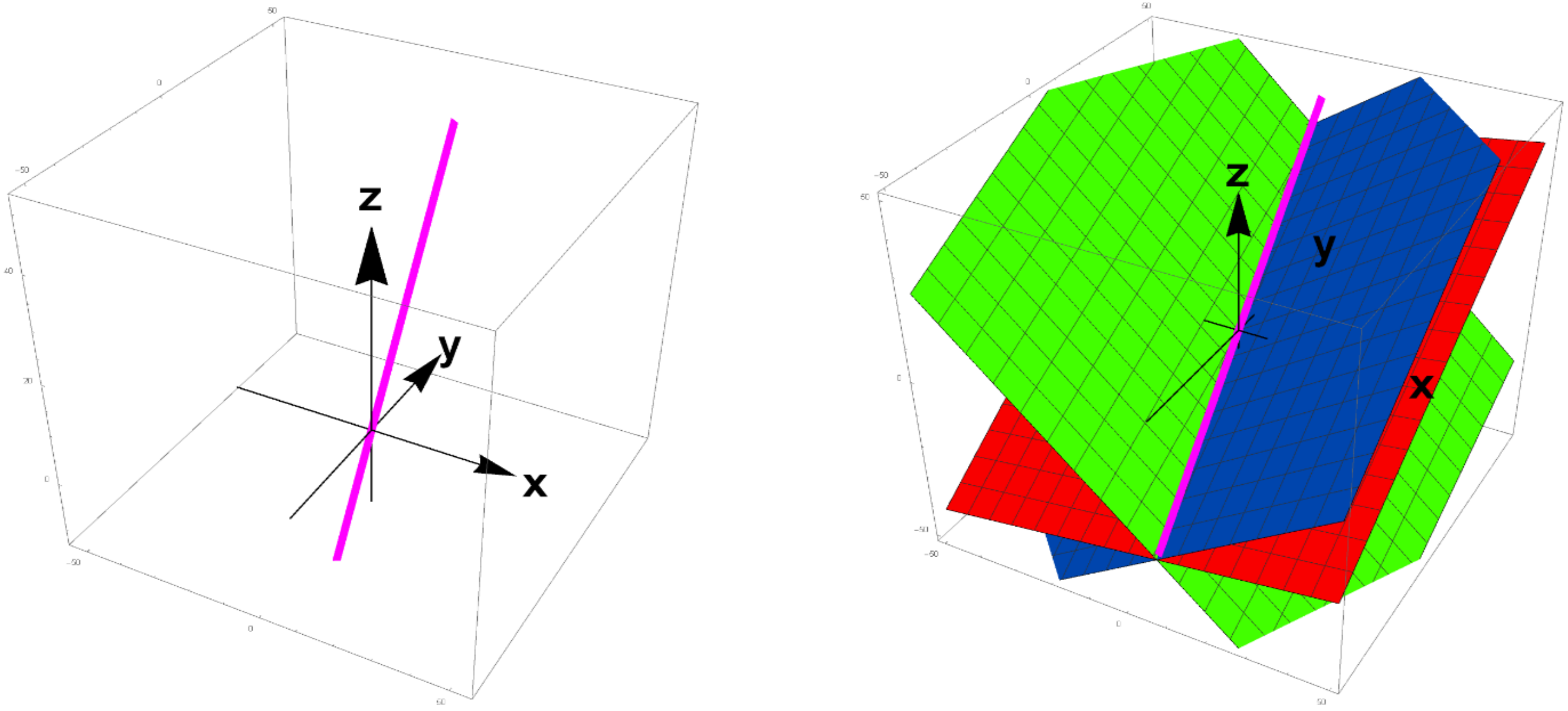
$$(4) \implies -9y = -14\lambda \implies \quad y = \frac{14}{9}\lambda = 1{,}55\,\lambda$$

$$(1) \implies x + 4\frac{14}{9}\lambda - 6\lambda = 0 \quad \implies \quad x = -\frac{56}{9}\lambda + 6\lambda = -0{,}22\,\lambda$$

Also haben wir

$$\begin{cases} x = -0{,}22\,\lambda \\ y = 1{,}55\,\lambda, \qquad \text{für } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Dies ist die Parameterdarstellung einer Geraden in $\mathbb{R}^3$ (die durch $\vec{0}$ geht).
Damit hat das LGS unendlich viele Lösungen.



Das System (12.19) hat unendlich viele Lösungen einschließlich $\vec{0}$. Im Video LINK dreht sich das Bild in 3D.

http://sn.pub/1yXNws

http://sn.pub/p12JS5

Die Cramersche Regel

Für quadratische LGS fürdie die Determinante nicht verschwindet, gibt es ein spezielles Lösungsverfahren.

Betrachte das (n,n)-LGS

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & a_{ik} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_k \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ c_i \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix}$$

Dann gilt die ***Cramersche Regel***.

Voraussetzung:

$\mathrm{D} = \det(\mathbf{A}) \neq 0$ Berechne die Determinanten

$$D_1 := \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{23} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{ik} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{23} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{ik} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & c_n & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots..$$

$$D_k := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2. & \cdot & \cdot & a_{23} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & c_n & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots. D_n := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{ik} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & c_n \end{vmatrix}$$

Dann ist die Lösung des LGS (12.20):

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots .\, x_k = \frac{D_k}{D}, \dots \quad , x_n = \frac{D_n}{D}$$

Beispiel 12.9:

Betrachte das LGS

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0.$$

Somit ist die Voraussetzung für die Cramersche Regel erfüllt und es gilt:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Somit ist

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-1}{5} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{5}\ .$$

Also ist die Lösung:

$$\vec{x} = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$$